

Hausdorffova Dimenze při studiu sídel

Obsah

1	Úvod	4
2	Fraktální geometrie	5
2.1	Geometricky hladké útvary, topologická dimeze	5
2.2	Nekonečně složité útvary, soběpodobnost, Hausdorffova dimeze .	6
3	Měření fraktální dimenze	10
3.1	Geometrie Kochovy vložky	10
3.2	Metody odhadu fraktální dimenze	13
3.2.1	Box-Counting Algoritmus	14
3.2.2	Triangular Prism Surface Area (TPSA) Algoritmus . . .	15
3.3	Implementace v GIS	17
4	Metody	19
4.1	Shapiro-Wilkův test	19
4.2	Kruskal-Wallisův test	19
4.3	Diskriminační analýza	20
4.3.1	Předpoklady diskriminační analýzy	21
4.4	Analýza klasifikačními stromy	22
5	Případová studie 1: Fraktální charakteristiky urbánního růstu	23
5.1	Metody	23
5.2	Pracovní hypotéza	25
5.3	Výsledky	26
5.4	Diskuze	30
5.5	Závěr	32
6	Případová studie 2: Fraktální charakteristiky morfologie listů jako podklad pro klasifikaci geodat	33
6.1	Data a jejich zpracování	33
6.2	Metody	35
6.3	Výsledky	36

6.4	Diskuze	38
6.5	Závěr	41
7	Případová studie 3: Vztah mezi geometrií a využitím funkčních ploch	42
7.1	Měřené charakteristiky	42
7.2	Metody	43
7.2.1	Vyšetření korelace proměnných	43
7.2.2	Ověření předpokladů pro klasifikaci	45
7.3	Výsledky	46
7.4	Diskuze	47
7.5	Závěr	48
8	Diskuze	49
8.1	Kvalita dostupných software pro výpočet fraktální dimenze . . .	49
8.2	Perspektivy fraktální analýzy v geoinformatice	49
9	Závěr	52
10	Seznam použité literatury	53

1 Úvod

Fraktální geometrie se poprvé objevuje v literatuře v 60. a zejména 70. letech a záhy si získává široké publikum. Nahlížení na objekty reálného světa jako na přesně matematicky definované útvary, které ale nesplňují všechna pravidla euklidovského prostoru, neustále se větví, transformují, mají neceločíselnou dimenzi - a přitom k jejich popisu stačí velmi jednoduchý matematický předpis - bylo revolučním krokem, kdy tvary začaly být zkoumány z hlediska jejich komplexnosti namísto jejich metrických charakteristik.

V geovědách obecně a v geoinformatice zvláště jsou charakteristiky tvaru esenciální pro celou řadu úloh. Na základě tvaru říčních sítí usuzujeme na podmínky jejich vzniku, tvarové charakteristiky reliéfu používáme k jeho popisu a na základě sídelní struktury města rozmísťujeme školy, nemocnice, zastávky hromadné dopravy apod.

Fraktální útvary (jak bude ukázáno dále) jsou invariantní vůči měřítku a poskytují tak unikátní nástroj k porovnávání tvarů jen na základě jejich komplexnosti, složitosti. Tato práce má za úkol seznámit čtenáře se základy fraktální geometrie, vypíchnout její zvláštnosti a na příkladech ukázat její užitečnost při zkoumání fenoménů z oblasti geověd, obzvláště z oblasti geografie sídel.

První kapitola definuje fraktální objekty jako protiklad ke geometricky hladkým objektům. V druhé kapitole je popsáno měření fraktální dimenze, třetí kapitola se zabývá statistickými metodami, které jsou použity ve třech případových studiích, popsaných v kapitolách 5, 6, 7.

První případová studie se zabývá možnostmi popisu urbánního vývoje města na základě jeho fraktálních charakteristik, druhá případová studie zkoumá možnosti využití fraktálních charakteristik k automatické klasifikaci tvarů (na příkladu morfologicky odlišných listů několika druhů rostlin) a třetí studie se snaží aplikovat poznatky z druhé studie na základní funkční plochy města Olomouc, respektive zkoumá, zda-li jejich geometrické charakteristiky poskytují dostatek informace k usuzování o funkci plochy.

2 Fraktální geometrie

2.1 Geometricky hladké útvary, topologická dimeze

Běžná tělesa a útvary v našem okolí se dají popsat nebo zobrazit jako jistý konečný počet parametrů, které tato tělesa charakterizují. Pro základní geometrické tvary, například pro krychli, kouli, válec, prsteneček, úsečku, přímku či rovinu, známe vzorce a vztahy, ze kterých můžeme vypočítat jejich geometrické charakteristiky, například délku, plochu či objem. Tyto veličiny můžeme spočítat i pro poněkud složitější útvary, které vzniknou kombinací konečného počtu elementárních útvarů. Lze třeba spočítat délku Bézierovy křivky nebo objem láhve vzniklé rotací této křivky okolo osy rotace. Výsledky jsou nezávislé na použitých jednotkách (ať už budeme udávat délky stran v milimetrech nebo sázích, vypočtený objem bude po přepočtu na shodné jednotky u obou stejný). Všechny tyto útvary mají jednu společnou vlastnost. Každému útvaru můžeme přiřadit jisté celé číslo, které nazýváme počet rozměrů nebo také dimeze daného útvaru. Takže úsečka, přímka či jiná křivka (například parabola, sinusová křivka či Bézierova křivka) má dimezi rovnu 1. To znamená, že je jednorozměrná a tudíž poloha bodu je na ní definována pouze jedním číslem - souřadnicí. Například polohu bodu na sinusovce lze vyjádřit jako:

$$x = \sin(t),$$

kde t je jediný parametr, který jednoznačně definuje polohu bodu na sinusovce. Hodnota x potom přímo udává polohu tohoto bodu. To, že má křivka dimezi rovnu jedné neznámá, že je zobrazována v jednorozměrném prostoru. Dimeze udává jen počet parametrů, které jsou nutné pro definování bodu na křivce. Křivka tedy může být zobrazena v trojrozměrném prostoru, ale její dimeze bude jedna, protože poloha bodu na ní bude definována pomocí jednoho parametru. Jediným použitým parametrem je zde opět t , polohu bodu potom definují tři souřadnice x, y a z . Také můžeme uvažovat tak, že pro křivky, které mají dimezi jedna, je definována jejich délka (která může být i nekonečná), ale jejich plocha je nulová (jsou nekonečně tenké). Jakákoliv hladká plocha (kruh, trojúhelník, n -úhelník) má dimezi rovnu 2, to znamená,

že poloha bodu musí být definována pomocí dvou souřadnic. Takto definované plochy mají určitý obsah, ale jejich objem je nulový, protože mají nulovou tloušťku. Krychle, koule, válec nebo celý běžný prostor kolem nás mají dimenzi 3, protože poloha bodu je v nich jednoznačně určena třemi souřadnicemi. Takto lze samozřejmě pokračovat dále, ale s dalšími dimenzemi nemáme zkušenosti. Z matematického hlediska však není velkým problémem definovat například čtyřrozměrnou kouli. Trošku specifickým případem je bod, který má dimenzi 0, poněvadž polohu bodu v něm samém není třeba určovat žádnou souřadnicí. Ve všech předchozích případech jsme mluvili o dimenzi, která je specifikována celým číslem. Tato dimenze se nazývá dimenze topologická. Pro tyto tělesa, která můžeme označit jako normální nebo běžné, platí, že všechny jejich parametry mohou být zadány v libovolné jednotce, aniž by se změnila vlastnosti tělesa. To znamená, že nezáleží na měřítku, se kterým se na těleso díváme [43].

2.2 Nekonečně složité útvary, soběpodobnost, Hausdorffova dimeze

Z předchozí podkapitoly vyplývá závěr, že pro běžné útvary vystačíme s dimenzemi 0, 1, 2 nebo 3. Nicméně pro většinu přírodních útvarů není toto rozdělení na celočíselné dimenze dostatečné. Klasický příklad takového útvaru je pobřeží ostrova. Můžeme zkusit vypočítat délku pobřeží tohoto ostrova. Je-li linie pobřeží zobrazena na mapě (nebo leteckém snímku), má tato mapa určité měřítko, například 1: 1 000 000. Pomocí kružítko můžeme krokováním délku pobřeží přibližně zjistit a přepočítat na kilometry, protože známe měřítko mapy. Dostaneme-li však k dispozici přesnější mapu, která má měřítko například 1: 10 000 a budeme-li opět měřit délku toho samého úseku pobřeží, dostaneme délku odlišnou - větší. To znamená, že se změnou měřítka se změnila délka toho samého objektu - v našem případě pobřeží. Důvod se zdá být jasný - při zmenšení měřítka vidíme i detaily pobřeží, které nebyly na mapě s větším měřítkem viditelné. Samozřejmě, že při cestě pěšky okolo ostrova bude délka ještě větší, ovšem za předpokladu, že půjdeme přesně na hranici pobřeží a nebudeme si cestu zkracovat. Se zmenšujícím se měřítkem by délka dále rostla, a při

délce měření blížící se limitně k nule, by délka rostla dokonce až do nekonečna. Z toho vyplývá, že ostrov o konečné ploše má nekonečnou délku pobřeží. Výše uvedený příklad není pouhou myšlenkovou abstrakcí, ale vyskytl se reálně při měření obvodu ostrova Korsiky [35]. Čím byla větší přesnost tohoto měření, tím větší byla naměřená délka. Tato skutečnost nebyla dlouhou dobu známa, a proto se délky státních hranic lišily až o násobky očekávaných délek. V dnešní době se v moderních atlasech délka hranic většinou ani neuvádí [43]. Obvod ostrova Korsiky měřil Richardson [35], který také jako první zjistil, že obvod ostrova je závislý na délce tyče, kterou se měří. Richardson také empiricky odvodil následující vztah:

$$L(G) = MG^{1-D}, \quad (1)$$

kde $L(G)$ je měřená délka geografické hranice, M a D jsou konstanty a G je měřítko (ve smyslu délky měřidla) [35]. Délka pobřeží se ukázala být závislá na konstantě D , jejíž význam si však Richardson nedokázal vysvětlit. Až Benoît B. Mandelbrot dokázal souvislost této konstanty a Hausdorffovy dimenze [26]. Také délka řek se musí měřit odlišným způsobem, než jaký byl běžně používán. Můžeme změřit délku řeky tak, že postupně změříme délku pravého a levého břehu a výslednou vzdálenost zprůměrujeme. Jak však již víme, v tomto případě by se při velmi přesném měření délka řek pohybovala v astronomických jednotkách a limitně by se blížila nekonečnu. Jak však intuitivně víme, délka řeky nemůže být nekonečná, protože jestliže na řece poplujeme konstantní rychlostí, určitě doplujeme na konec řeky v konečném čase. Je tedy nutné měřit například po pevně daných krocích, nebo přímo v toku řeky. Také plocha některých objektů v přírodě, které mají konečný objem, může být nekonečná (nebo až o několik řádů větší, než bychom zprvu očekávali). Například povrch planety je teoreticky nekonečný. Zdálo se, že planeta vypadá jako dokonalá koule (či rotační elipsoid). Při určitém přiblížení rozeznáme vrcholky hor a velká údolí. Při dalším přiblížení zjistíme, že každá hora je velmi členitá a její plocha je obdobně členitá jako povrch celé planety. Každý kámen potom vypadá jako celá hora, ale je mnohem menší. S touto změnou měřítka můžeme pokračovat dále až do subatomárních struktur. Obrovská je i plocha plic či

lidského mozku při relativně malém objemu. Ve všech těchto případech jde o praktickou aplikaci fraktálů v přírodě, kde obecně platí princip úspornosti [43].

Měřením délky geometricky hladké křivky, která má dimenzi 1, dostaneme při měření v různých měřítkách vždy stejné konečné číslo. Měřením délky ostrova se při zmenšování měřítka toto číslo stává nekonečně velkým. Pobřeží tedy v rovině zabírá více místa než hladká křivka. Nezabírá však všechno místo (nevyplňuje celou rovinu). Jeho skutečná dimenze je tedy větší než dimenze křivky (ta je rovna jedné) a současně je menší než dimenze roviny (ta je rovna dvěma). Z toho jasně vyplývá, že dimenze takového útvaru není celočíselná [16]. Toto neceločíselné číslo se nazývá Hausdorffovou dimenzí. Hodnota Hausdorffovy dimenze udává, s jakou rychlostí délka těchto útvarů (či odpovídající veličina při větším počtu rozměrů) roste do nekonečna. Jestliže se bude Hausdorffova dimenze a topologická dimenze lišit velmi málo, bude takový objekt málo členitý. Bude-li Hausdorffova dimenze ostře větší než dimenze topologická, bude objekt velmi členitý. Hausdorffova dimenze se někdy nazývá též fraktální dimenze [43].

Dalším pojmem, o kterém se musíme při popisování fraktálů zmínit, je soběpodobnost. Soběpodobnost (matematicky se tato vlastnost nazývá invariance vůči změně měřítka) je taková vlastnost objektu, že objekt vypadá podobně, ať se na něj díváme v jakémkoliv zvětšení. Soběpodobnost je hlavním znakem fraktálních útvarů a většinou je také považována za jejich definici. To nám také pomáhá při vyhledávání fraktálních útvarů v přírodě. Soběpodobný je například kámen, hory, oblaka, stromy, rostliny ale i krátery atd., tedy objekty živé i neživé přírody. Matematicky je soběpodobná množina definována takto: Soběpodobná množina A n -dimenzionálního Euklidovského prostoru E_n je taková množina, pro níž existuje konečně mnoho kontrahujících zobrazení $\phi_1 \dots \phi_n$ takových, že A vznikne jako:

$$A = \bigcup_{i=1}^n \phi_i A. \quad (2)$$

Takto definovaná množina má několik velmi zajímavých vlastností:

- Soběpodobná množina vzniká opakováním sebe sama při určité transformaci (změna měřítka, rotace, posunutí, zkosení).

- Soběpodobné množiny jsou invariantní vůči změně měřítka. Při libovolném zvětšení, či zmenšení vypadají podobně.
- Soběpodobná množina vzniká sama ze sebe, respektive vzniká opakováním téhož motivu.

Princip opakování podobných tvarů ve zmenšené podobě je vidět prakticky u jakékoliv komplexní, složité struktury, která je vytvářena i pomocí velmi jednoduchých pravidel. Způsob, jakým probíhá větvení stromů či cév a žil v tělech živočichů, nebo hromadění bakterií a řas v koloniích, se dá matematicky uspokojivě popsat pouze fraktální geometrií. Fraktály však slouží i k modelování a pochopení složitých dějů, které se odehrávají v čase, jedná se tedy o jevy dynamické. Při používání pojmu soběpodobnosti si musíme uvědomit, že se jedná o podobnost objektu při změně měřítka. Existuje mnoho geometrických útvarů, které jsou podobné (nebo shodné) při aplikaci jiné transformace. Například čtverec je invariantní vůči středovému zrcadlení, kruh je invariantní vůči stranovému zrcadlení a přímka je invariantní vůči posunu ve směru jejího vektoru. Tato invariance, pokud není doprovázena invariancí vůči změně měřítka, v žádném případě nedefinuje fraktál.

Jestliže víme, co je to *topologická dimenze* a *Hausdorffova dimenze*, můžeme zde uvést definici fraktálu tak, jak ji formuloval matematik Benoît Mandelbrot [27]:

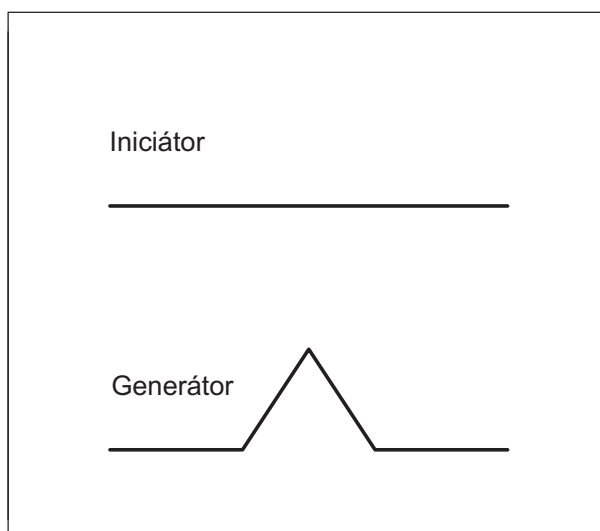
Fraktál je množina, jejíž Hausdorffova dimenze je větší než dimenze topologická.

Je nutné poznamenat, že ne všichni matematikové se dnes ztotožňují s touto definicí; ve skutečnosti žádná matematicky přesná definice fraktálu (zatím) neexistuje. Pro naše účely je však tato definice dostatečná. Zajímavé také je, že Hausdorffova dimenze byla známa dlouho před definováním pojmu fraktál, ale neměla žádné praktické využití [43].

3 Měření fraktální dimenze

3.1 Geometrie Kochovy vločky

Měření fraktální dimenze ukážeme na příkladu tvaru, který představil Helge von Koch roku 1904 a pro který se vžil název Kochova vločka [1]. Jako i další matematické fraktály, Kochova vločka vzniká aplikováním pravidla – *generátoru* – na původní tvar – *iniciátor*. Iniciátor i generátor jsou ukázány na obr. 1. Iniciátorem je linie o jednotkové délce, generátorem je rozdělení linie na čtyři shodné části tak, aby ve středu původní linie vznikl rovnostranný trojúhelník. Aplikováním pravidla – generátoru v menším měřítku docílíme dalšího ”zesložnění” tvaru a celý proces probíhá dále v iteracích a blíží se k limitě. První čtyři iterace tzv. Kochova ostrova jsou ukázány na obr. 2.



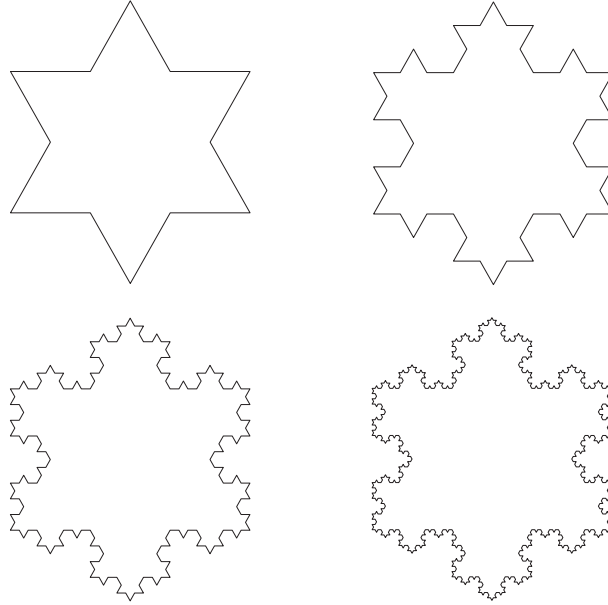
Obrázek 1: Iniciátor a generátor pro Kochovu křivku.

Na příkladě Kochovy vločky ukážeme některé problémy, které vedou k pochybám o praktickém uplatnění konceptu euklidovského prostoru a dimenze. Nejprve spočítáme délku linie, vytvořením opakovaného aplikování pravidla. Délku původní linie – iniciátoru – označíme jako:

$$L_0 = r \tag{3}$$

Po aplikování generátoru dostaneme délku L_1 , která má $\frac{4}{3}$ délky L_0 :

$$L_1 = \frac{4}{3}r \tag{4}$$



Obrázek 2: První čtyři iterace Kochova ostrova.

Další iterace pak dávají:

$$L_2 = \frac{4}{3}L_1 = \left(\frac{4}{3}\right)^2 r \quad (5)$$

...

$$L_k = \left(\frac{4}{3}\right)^k r \quad (6)$$

Je zřejmé, že jak se k blíží limitně k nekonečnu, blíží se i délka L k nekonečnu.

Nyní si ukážeme na příkladu Kochova ostrova (obr. 2), že ačkoli je délka fraktálních útvarů nekonečná, jejich plochu nabývá reálných hodnot. Kochův Ostrov je útvar, který vznikne aplikování generátoru na rovnostranný trojúhelník. Označme A_0 plochu trojúhelníku o straně L_0 .

$$A_0 = \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)(L_0)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}r^2 \quad (7)$$

Při první iteraci, tři rovnostranné trojúhelníky o straně $\frac{r}{3}$ jsou přidány ke každé ze tří původních stran.

$$A_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}r^2 + 3 * \left(\frac{\sqrt{3}}{4} \frac{1}{3}r^2\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}r^2 * \left(1 + \frac{1}{3}\right) \quad (8)$$

Při každé iteraci, $3 \cdot 4^{k-1}$ trojúhelníků je přidáno ke stávajícím tvaru a celkovou plochu při k -té iteraci tudíž můžeme vypočítat jako:

$$A_k = \frac{\sqrt{3}}{12} r^2 \left(\frac{4}{9}\right)^{k-1} \quad (9)$$

Jak ukazují [1], pokud se k blíží limitně k nekonečnu, je celková plocha rovna:

$$A = \frac{8}{5} A_0 \quad (10)$$

Obdobné rovnice prezentují i [45] a [30]. Pokud chceme vysvětlit paradox konečného objemu a nekonečné délky, musíme se vrátit k rovnici (6)

$$L_k = \left(\frac{4}{3}\right)^k r \quad (6)$$

Délka L v rovnici (6) je dána číslem kopií původního tvaru N , a poměru zmenšení r_k , aplikovaného na původní délku r . Tento udává délku kopií v N_k -té iteraci. Délka L_k je tedy definována jako:

$$L_k = N_k r_k r \quad (11)$$

Je zřejmé, že pro Kochovu křivku platí $N_k = 4k$ a $r_k = \frac{r}{3^k}$.

Iterace k	Kochova křivka				Přímka			
	N_k	r_k	r_k^{-1}	$N_k r_k$	N_k	r_k	r_k^{-1}	$N_k r_k$
0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	4	$\frac{1}{3}$	3	1,333	4	$\frac{1}{4}$	4	1
2	16	$\frac{1}{9}$	9	1,777	16	$\frac{1}{16}$	16	1
3	64	$\frac{1}{27}$	27	2,370	64	$\frac{1}{64}$	64	1
:	:							:
:	:							:
:	:							:

Tabulka 1: vlastnosti Kochovy křivky při změně měřítka.

Jak ukazují [1] v tab. 1 chování Kochovy vložky a přímky při zvyšujícím se k . Zatímco u přímky rostou N_k a r_k^{-1} stejně rychle, u Kochovy vložky roste

N_k mnohem rychleji. Pokud bychom chtěli předpovědět N_k na základě r_k^{-1} , je zřejmé, že bychom museli člen r_k^{-1} umocnit konstantou D .

$$N_k = r_k^{(-1)D} = r_k^D \quad (12)$$

Pro přímkou by bylo $D = 1$, pro Kochovu vložku by bylo $D > 1$. Po substituci $N_k = r_k^{-D}$ do rovnice (11) dostaneme délku vyjádřenou jako:

$$L_k = r_k^{(1-D)} \quad (13)$$

Je zřejmé, že D hraje v této rovnici roli dimenze (pokud by bylo $D = 1$, pak by výsledkem byla konstanta – tedy případ například přímky). Tím jsme dokázali, že dimenze Kochovy vložky je větší než 1. Vezmeme-li logaritmus rovnice (12), můžeme dimenzi vyjádřit jako:

$$D_k = \frac{\log(N_k)}{\log\left(\frac{1}{r_k}\right)}. \quad (14)$$

Pro křivku Kochové jsou $N_k = 4$ a $\frac{1}{r_k} = 3$, Hausdorffova dimenze je tedy:

$$D_k = \frac{\log(4)}{\log(3)} \cong 1,262. \quad (15)$$

Tento vzorec lze použít pro výpočet dimenze jakéhokoli fraktálu, který splňuje podmínku soběpodobnosti a který lze popsat pomocí iniciátoru a generátoru. V reálu se ovšem vyskytují útvary, které nelze matematicky popsat (pobřežní linie, síť cév v lidském těle, struktura listu), a tento vzorec tedy nelze použít. Tyto útvary sice nemají exaktní matematický předpis, přesto mají některé vlastnosti, které jsou charakteristické pro fraktály - především jsou soběpodobné (při určité míře generalizace). Různé metody odhadu fraktální dimenze reálných objektů budou popsány v další kapitole.

3.2 Metody odhadu fraktální dimenze

Zde popisované metody slouží k určení fraktální dimenze objektů v obrazových záznamech. Předpokládají obrazový soubor, který je složen z pixelů. Metoda box-count se dá použít pouze pro analýzu binárních obrazových záznamů. Pokud má obrazový záznam hodnoty pixelů v odstínech šedé (tzv. greyscale

image), je možné použít metodu Triangular Prism Surface Area. Při analýze barevných obrazů (vznikají nejčastěji kombiancí tří obrazů v odstínech šedé) se postupuje rozkladem na jednotlivé obrazy v odstínech šedé a analýzou každého z nich samostatně.

3.2.1 Box-Counting Algorithmus

Nejznámější a nejpoužívanější algoritmus pro odhad fraktální dimenze je zřejmě box-counting algoritmus. Tato metoda byla také použita při studiu fraktálního chování urbánních systémů jako první [44]. Základní principi této metody je následující: vybereme obdélníkovou oblast (případně čtvercovou) a rozdělíme ji na 4^n shodných částí v n krocích. Současně s tím, strana obdélníku je rozdělena na 2^n shodných částí [12]. Výpočet fraktální dimenze na základě tohoto dělení se nazývá box-count metoda [19].

Definice: Předpokládejme, že pro dané $\epsilon > 0$ je sledovaný objekt pokryt množinou o poloměru maximálně ϵ . Nechť $N(\epsilon)$ je nejmenší číslo takových množin potřebných pro pokrytí celého objektu. Horní a dolní box-counting dimenze objektu jsou definovány respektive k limitám [40]:

$$\underline{d} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log(N(\epsilon))}{\log(\frac{1}{\epsilon})} \quad \text{a} \quad \bar{d} = \overline{\lim}_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log(N(\epsilon))}{\log(\frac{1}{\epsilon})} \quad (16)$$

Pokud jsou obě limity shodné, pak nazýváme jejich společnou hodnotu jako Box-counting dimenzi sledovaného objektu a označujeme ji d [40].

$$d = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log(N(\epsilon))}{\log(\frac{1}{\epsilon})} \quad (17)$$

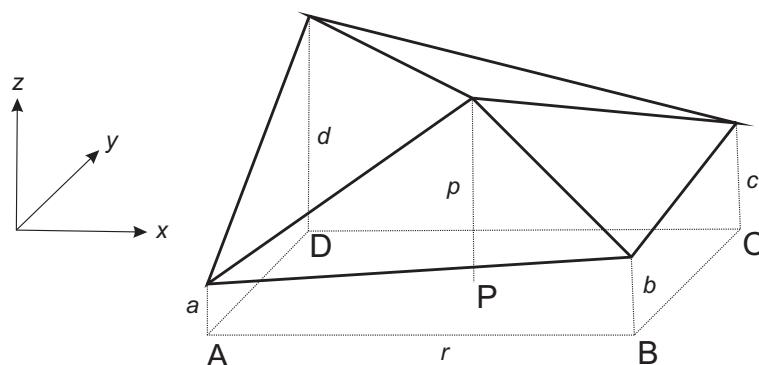
Obecný postup při výpočtu box dimenze je následující: nejprve překryjeme studovaný objekt čtvercem. Tento čtverec určitě není prázdný (obsahuje v sobě studovaný útvar) – počet neprázdných čtverců je tedy 1. Dále čtverec rozdělíme na čtyři stejné části (jednu jeho stranu rozdělíme v polovině) a spočítáme počet neprázdných čtverců (neprázdné čtvece jsou ty, které protínají nebo v sobě obsahují část studovaného objektu). Opět provedeme dělení čtverců a zjistíme počet neprázdných čtverců. Při druhém dělení bude počet čtverců 4^2 a délka strany čtverce bude $(\frac{1}{2})^2$. Takto budeme pokračovat do té doby, než

bude původní čtverec rozdělen do 4^n částí o straně délky $(\frac{1}{2})^n$. Například [12] doporučují jako optimální $n = 9$. V průběhu výpočtu jsme získali n párů údajů o velikosti strany čtverce a o počtu neprázdných čtverců.

Zjistíme, zda tato data splňují podmínku mocninového zákona $N(\epsilon) \propto \epsilon^{-D}$. Pokud je tato podmínka splněna, můžeme usuzovat, že útvar F je fraktální. Jelikož je mocninný zákon lineárním vztahem logaritmů [20], tento problém může být vyřešen zobrazením párů dvojic do Richardson-Mandelbrot grafu [9]. Tento graf má na osách vyneseny logaritmy hodnot počtu čtverců a délky jejich strany. Pokud je trend lineární, můžeme předpokládat, že studovaný objekt je fraktální [12]. Pomocí metody nejmenších čtverců aproximujeme body regresní linií. Absolutní hodnota jejího sklonu je fraktální dimenzí studovaného objektu. Tento algoritmus se používá pro odhad dimenze u binárních obrazových záznamů, pro obrazy se škálou barev je nepoužitelný. Je patrné, že tuto metodu lze rozšířit i pro třírozměrný prostor a je tak možné počítat fraktální dimenzi trojrozměrných objektů. Tuto metodu implementovali [12] i pro vektorová data ve formátu .shp a úspěšně použili v software ArcGIS.

3.2.2 Triangular Prism Surface Area (TPSA) Algoritmus

Triangular Prism Surface Area (TPSA) algoritmus [6] uvažuje pixel P v obrazovém záznamu v odstínech černé a čtvercové prostředí se středem v P a rohy v pixelech A, B, C, D (obr. 3)



Obrázek 3: Schéma TPSA algoritmu (upraveno podle: [22]).

Spojením hodnot pixelů a, b, c, d, p dostaneme čtyři trojúhelníky, jejichž plo-

chu spočítáme. Toto zopakujeme pro každý pixel, který je dostatečně daleko od okrajů obrazu. Unikátní středové pixely P existují jen v případě, že velikost čtverce r je liché číslo. Pokud je r sudé číslo, ve středu leží čtyři pixely, jejichž průměr jejichž hodnot se dosadí za p (metoda, kterou definuje [6] používá jiné hodnoty pro středový pixel).

Je možné definovat osm trojúhelníků namísto čtyř přidáním pixelů $EFGH$ do středů stran AB, BC, CD, DA .

Plochy všech trojúhelníků se sečtou pro daná r a vynesou se do Richardson-Mandelbrotova grafu, kde sklon regresní přímky proložené body opět udává fraktální dimenzi obrazu. Je zřejmé, že způsob výpočtu plochy trojúhelníků bude mít velký vliv na výslednou fraktální dimenzi. Metoda, kterou navrhnul [6] má v tomto směru několik nedostatků. Tři nové přístupy k výpočtu plochy prizmatu představuje [39]. Založené jsou na alternativním určení pixelů A, B, C, D . Výsledky jsou testovány na příkladu interpertace různých druhů využití země a v porovnání s původním Clarkovým algoritmem poskytují lepší výsledky.

Tento algoritmus byl testován jako nejvhodnější pro analýzu smíneků dálkového průzkumu [21] a neustále jsou vyvíjeny nové algoritmy pro zlepšený odhad parametrů této metody.

Metod pro výpočet fraktální dimenze je více, například [13] představují tangential algorithm, další metody – izarithm a variogram method byly aplikovány na geografické problémy [14]. Alternativou k box-counting metodě je 2D-variation procedure algoritmus [8], který je sice méně efektivní než box-counting metoda, ale je vhodnější pro diskriminační úlohy [22].

Nicméně nejčastější algoritmy používané pro určení fraktální dimenze jsou právě box-count algoritmus (určený pro analýzu binárních obrazových záznamů, ale např. software HARFA používá obměnu tohoto algoritmu i pro analýzu greyscale images [46]) a pro analýzu snímků DPZ pak TPSA algoritmus.

3.3 Implementace v GIS

Z předchozího textu je zřejmé, že fraktální dimenzi lze exaktně spočítat pouze pro matematické fraktály. Centrem zájmu geoinformatických disciplín jsou však objekty reálného světa, které nelze přesně matematicky popsat. V minulé kapitole byly ukázány dvě metody, nejčastěji používané pro odhad fraktální dimenze binárních (box-counting), respektive greyscale (TPSA) obrazových záznamů. U obou metod se stanovuje fraktální dimenze na základě sklonu regresní přímky proložené daty. Tato regresní přímka může být zatížena chybami (například při příliš malé velikosti okna) a automatizování procedury je tedy složité.

Nástroje pro výpočet box-counting dimenze implementoval [24] ve formě skriptů *r.boxcount* a *r.boxcount.sh* do prostředí GRASS GIS. *r.boxcount* počítá box-counting dimenzi binárního rastru, včetně odhadu sklonu regresní přímky, *r.boxcount.sh* pak počítá lokální box-counting dimenzi a prezentuje ji přímo formou rastrové mapy.

Rovněž SAGA GIS nabízí nástroj pro výpočet box-counting dimenze ve svém modulu *Fractal Dimension of Grid Surface*. Výstupem tohoto nástroje je tabulka, udávající počty čtverců a velikost okna. Proložení regresní přímky těmito daty pak umožňuje odhadnout fraktální dimenzi, nicméně musí být provedeno externě.

Pro analýzu dat DPZ slouží modul ICAMS [33], běžící na platformách Intergraph-MGE a Arc/Info, který má implementovány tři metody pro odhad fraktální dimenze – isarithm, variogram, a TPSA. Tento modul nebyl uvolněn pro veřejnost, ale je možné vyžádat ho od prof. Niny Lam z Louisiana State University.

Rovněž ESRI produkty obsahují nástroje pro odhad fraktální dimenze. Hawth's Tools Analysis for ArcGIS obsahují nástroj počítající fraktální charakteristiky liniových či plošných prvků, Patch Analyst (v současné verzi 4) nabízí tentýž

nástroj pro plošné prvky.

Nedá se hovořit o skutečné fraktální dimenzi, protože vzorce, který obě aplikace používají, nesledují studovaný útvar v různých měřících. Jak bylo ukázáno v předchozích kapitolách, sledování stejného útvaru v různých měřících je přitom základem teorie fraktální geometrie. Je lepší proto hovořit o odhadech složitosti, než fraktální dimenze.

Složitost liniového prvku se spočítá následovně :

$$D = \frac{\log(n)}{\log(d) + \log(L)},$$

kde n je počet segmentů linie, d je vzdálenost mezi prvním a posledním bodem linie a L je celková délka linie.

Složitost plošného prvku se pak vypočte jako:

$$D = \frac{2 * \log(p)}{\log(A)},$$

kde p je obvod polygonu a A je jeho plocha. Je zřejmé, že u protáhlých prvků s velkým obvodem a malou plochou toto číslo může překročit hodnotu 2. Z hlediska fraktální geometrie je toto pro plošné prvky vyloučeno, tudíž není vhodné tyto metriky nazývat jako fraktální.

Pozn: oba zmíněné software v případě překročení hodnoty 2 toto číslo uměle sníží na 2.

4 Metody

4.1 Shapiro-Wilkův test

Shapiro-Wilkův test byl použit pro ověření předpokladu normality rozdělení vstupních dat. Testována je nulová hypotéza H_0 že vzorek x_1, \dots, x_n pochází z populace o normálním rozdělení [36]. Testovací statistika W se spočte jako:

$$W = \frac{(\sum_{i=1}^n a_i x_i)^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \quad (18)$$

kde x_i označují pořadové statistiky a a_i jsou váhy dané vztahem:

$$(a_1, \dots, a_n) = \frac{m^T V^{-1}}{(m^T V^{-1} V^{-1} m^T)^{1/2}}, \quad (19)$$

kde:

$$m = (m_1, \dots, m_n)^T \quad (20)$$

a m_1, \dots, m_n jsou očekávané hodnoty pořadových statistik nezávislého prostého náhodného výběru s normálním rozdělením $N(0, 1)$ o rozsahu n a V je kovarianční matice těchto hodnot.

Nulová hypotéza bývá zamítnuta při malém W .

4.2 Kruskal-Wallisův test

Kruskal-Wallisův test je jednou z mnoha obměn statistické metody ANOVA. Jeho cílem je zjistit, zda se mediány populací mezi skupinami liší [23]. Jedná se o neparametrickou metodu, kterou je vhodné použít namísto klasické ANOVY, jsou-li předpoklady normality silně porušeny. Tato metoda je identická s metodou ANOVA s tím rozdílem, že data jsou nahrazena svým pořadím.

Postup testování Kruskal-Wallisovým testem je následující:

- Určení pořadí všech dat ve všech skupinách. Data jsou označena $1, \dots, N$ a členství do skupin je ignorováno. Data se stejnou hodnotou jsou označena průměrem pořadí, které by obdržela, pokud by nebyla shodná.
- Testovací statistika je dána:

$$K = (N - 1) \frac{\sum_{i=1}^g n_i (\bar{r}_i - \bar{r})^2}{\sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^{n_i} (r_{ij} - \bar{r})^2}, \quad (21)$$

kde n_i je počet pozorování ve skupině i , r_{ij} je pořadí pozorování j ze skupiny i , N je celkový počet pozorování napříč všemi skupinami, $\bar{r}_i = \frac{\sum_{j=1}^{n_i}(r_{ij})}{n_i}$ a $\bar{r} = \frac{1}{2}N$

- p -hodnota je vypočtena jako $P(\chi_{g-1}^2 \geq K)$

4.3 Diskriminační analýza

Diskriminační analýza se zabývá otázkou, nakolik je příslušnost jednotky k určité skupině ovlivněna veličinami, popisujícími tuto jednotku [10], respektive zkoumá schopnost sledovaných proměnných přispět k odlišení jednotlivých skupin jednotek v souboru.

Tuto souvislost lze též chápat jako určité pravidlo, vedoucí k zařazení jednotek v souboru do skupin na základě zjištěných hodnot několika kvantitativních proměnných [17]. Diskriminační analýza tedy směřuje ke klasifikaci jednotek s neznámou skupinovou příslušností.

Základem Fisherova pojetí diskriminační analýzy je nelézt takovou lineární kombinací p sledovaných proměnných, tedy $Y = \mathbf{b}^T \mathbf{x}$, kde $\mathbf{b}^T = [b_1, b_2, \dots, b_p]$ je vektor parametrů, aby lépe než jakákoli jiná lineární kombinace separovala uvažovaných H skupin v tom smyslu, že její vnitroskupinová variabilita bude co nejmenší a meziskupinová variabilita co největší [17].

Největší meziskupinové a nejmenší vnitroskupinové variability veličiny Y dosáhneme zřejmě při maximalizaci podílu

$$F = \frac{Q_B(Y)}{Q_E(Y)} = \frac{\mathbf{b}^T \mathbf{B} \mathbf{b}}{\mathbf{b}^T \mathbf{E} \mathbf{b}}, \quad (22)$$

kde matice \mathbf{B} vyjadřuje vnitroskupinovou variabilitu, matice \mathbf{E} vyjadřuje meziskupinovou variabilitu a součty čtverců $Q_B(Y)$ a $Q_E(Y)$ tedy představují míru meziskupinové a vnitroskupinové variability pro novou veličinu Y . Předpokládejme, že populace je rozdělena do $H \geq 2$ skupin a že rozdělení vícerozměrné náhodné veličiny \mathbf{x} ve dvou skupinách je vícerozměrné náhodné s vektory středních hodnot μ_1 a μ_2 a shodnými kovariančními maticemi Σ .

Za předpokladu vícerozměrné normality a shody kovariančních matic lze obecně

lineární diskriminační kritérium pro případ H skupin zapsat jako:

$$\mathbf{x}^T \Sigma^{-1} \mu_h - \frac{1}{2} \mu_h^T \Sigma^{-1} \mu_h + \ln \pi_h, h = 1, 2, \dots, H., \quad (23)$$

kde μ_h jsou vektory středních hodnot a π_h je rozsahu skupin odpovídající a priori pravděpodobnost příslušnosti jednotky k určité skupině. Celé odvození vztahu je možné nalézt například v [17].

Jednotka neznámého původu s hodnotami pozorovaných proměnných \mathbf{x} je zařazena do skupiny s nejvyšší hodnotou diskriminačního kritéria (rovnice 22). Neznámé vektory středních hodnot je třeba odhadnout vektory výběrových průměrů a kovarianční matice společnou výběrovou kovarianční maticí, a priori pravděpodobnosti jsou odhadnuty výběrovými podíly jednotlivých skupin.

4.3.1 Předpoklady diskriminační analýzy

- **Rozsah vzorku:** vzorky odlišných rozsahů jsou přípustné. Doporučený rozsah nejmenšího vzorku je alespoň 20 [32].
- **Rozsah vzorku:** existuje předpokald vícerozměrného normálního rozdělení. Pokud je ale nenormalita způsobena zešikmením rozdělení a ne odlehlými hodnotami, testy signifikance podávají bez ohledu na nedodržení předpokladu normality dobré výsledky [41].
- **Homogenita kovariančních matic:** diskriminanční analýza je velmi citlivá na heterogenitu kovariančních matic.
- **Odlehlé hodnoty:** Odhledlé hodnoty se výrazně projevují jak při výpočtu vektorů středních hodnot μ_h , tak na rozptylu. Je dobré proto před započtením analýzy tyto hodnoty identifikovat a vyřadit.
- **Multikolinearita:** je-li jedna proměnná silně korelovaná s jinou (jebo je-li její funkcí), může to vyústit v případ, kdy matice nebude mít jedinečné diskriminační řešení [32]. Proto je vyžadována nízká multikolinearita nezávislých proměnných.

4.4 Analýza klasifikačními stromy

Základem analýzy pomocí klasifikačních stromů je předpověď příslušnosti prvku k jedné z předem definovaných tříd na základě sledovaných proměnných [3]. Klade si tedy stejné cíle jako diskriminační analýza, narozdíl od ní však nehledá lineární kombinaci vstupních proměnných takovou, která by co nejlépe separovala jednotlivé třídy, ale vytváří sktrukturu binárního stromu, který obsahuje pravidla pro zařazení objektů do tříd.

Celá procedura je velice složitá a sestává z mnoha kroků. Proto zde bude prezentován jen její zjednodušený náhled.

- Všechna data jsou přiřazena k prvnímu uzlu stromu.
- Je nalezena taková proměnná, která nejlépe separuje data na dvě části a data jsou rozdělena do dvou skupin.
- krok 2 je opakován pro každou ze skupin do té doby, než je překročena minimální velikost skupiny, nebo již nemůže být dělením dosaženo lepší separace.

Takto vytvořený strom může být velice složitý a proto je často potřeba ho zjednosušit. Jsou proto odstraněny některé větve stromu a to podle pravidla, že vždy je odstraněna ta větev, která nejméně přispívá k celkové úspěšnosti předpovědi. Tato procedura opět probíhá iterativně, dokud se nedosáhne určitého kritéria.

Kritérium pro dělení je zpravidla založeno na entropii [38].

5 Případová studie 1: Fraktální charakteristiky urbánního růstu

V první případové studii byl zkoumán růst města z pohledu jeho fraktálních charakteristik. Na základě leteckých snímků z let 1926 až 2006 byly určeny hranice města Olomouce a tato data pak byla zkoumána pomocí nástrojů fraktální geometrie.

Olomouc je v mnoha aspektech ideálním městem pro studium urbánního růstu. Se svým centrem na vyvýšenině nad řekou Moravou, obklopen nížinou Hornomoravského Úvalu, jeho růst byl v minulosti jen minimálně limitován reliéfem. Pro svou historickou důležitost bylo město opevněno a v minulosti nedocházelo k poboření města, což by mělo za následek rozsáhlé přestavby. Během 16. až 19. století bylo město mohutně opevněno a město si drželo svůj tvar až do roku 1886, kdy byly hradby strženy [42]. Po stržení hradeb se město začalo rozrůstat a spojovat s okolními osadami. Tento vývoj je dobře zaznamenán na leteckých snímcích, které byly v této práci použity.

Jak plocha, tak obrys města byl podroben analýze za účelem zhodnotit složitost tvarů v jednotlivých časových okamžicích. Výsledky pak byly podrobeny grafické analýze a na základě ní byly učiněny závěry o možném dalším vývoji města.

5.1 Metody

Jak bylo řečeno, na základě leteckých snímků byla určena hranice města. [1] ve své knize *Fractal Cities: A Geometry of Form and Function* tvrdí, že „Při definování fyzické formy města, jeho okraj či hranice jsou tím nejzjevnějším ukazatelem jeho velikosti a tvaru“. Samotný pojem *hranice města* je velmi vágní a je třeba jej přesněji definovat.

Jako město byly na leteckých snímcích identifikovány:

- Veškeré zastavěné plochy - tedy plochy obytné, průmyslové apod.

- Všechny plochy, které sice nejsou zastavěné, ale jsou zcela obklopeny zastavěným územím - parky, dopravní plochy apod.
- Území, která nejsou zastavěna, ale jsou od volné krajiny nějak oddělena - zahrady, sady, oplocené pole přiléhající přímo k městu.
- Zahrádkářské a rekreační objekty

Tyto objekty byly identifikovány na leteckých snímcích z let 1926, 1971, 1978, 1991, 2001, 2003 a 2006. Terénní průzkum byl použit tam, kde nebylo možné určit hranici města jen na základě leteckých snímků. Zájmové území tvoří současné území města Olomouc bez osad, od Olomouce oddělených volnou krajinou (Svatý Kopeček, Samotíšky, Křelov). Byly tedy zmapovány i osady, které na počátku mapování nebyly připojeny územně k Olomouci, ale v současnosti jejich zástavba plynule přechází v zástavbu města Olomouce (Slavonín, Holiče).

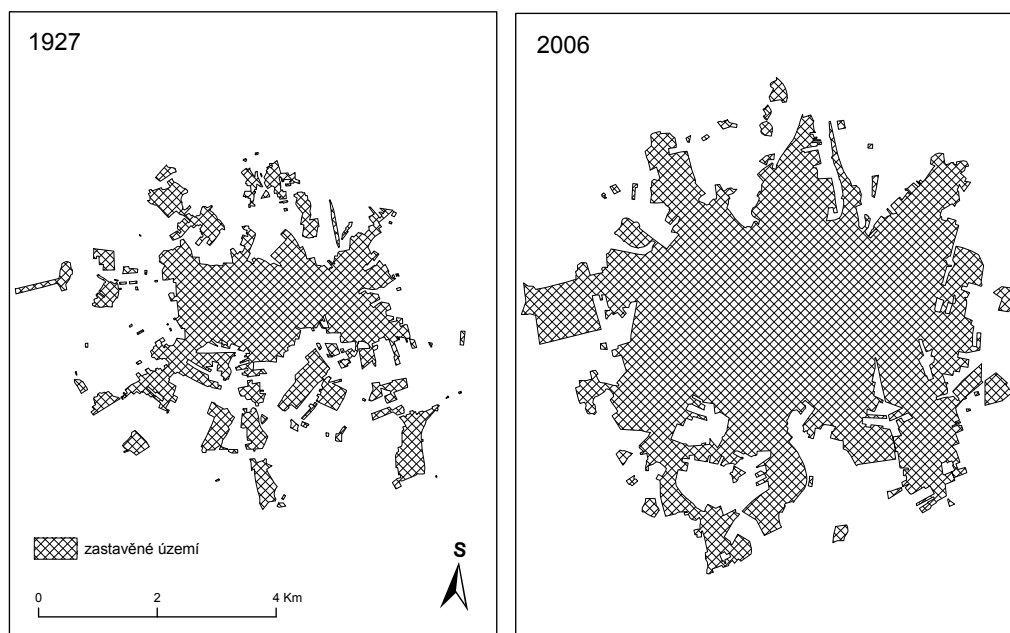
Digitalizace byla provedena v ESRI ArcGIS Desktop ve verzi 10. Výsledky byly uloženy ve formě binárního obrazového záznamu; pro každý rok vznikly dva obrazové záznamy - plocha města a hranice města (viz. obr. 5).

Vzhledem k tomu, že povaha sledovaného jevu (přítomnost městského prostoru) je dichotomická, byla jako vhodná metoda vybrána metoda box-counting (viz kapitola 3.2.1). Nástroje pro výpočet box-counting dimenze jsou zabudovány v celé řadě nekomerčních software pro analýzu obrazových záznamů. Pro analýzu fraktálních charakteristik byl použit software Fractalyse¹, což je volně dostupný produkt pro fraktální analýzu obrazových záznamů. Pro všechny dané roky byla vypočtena fraktální dimenze plochy, kterou město zabírá, a hranice města metodou box-counting.

Současně s fraktálními charakteristikami byly vypočteny i celkový obvod a plocha města v daný rok.

¹<http://www.fractalyse.org/>

RŮST ZASTAVĚNÉHO ÚZEMÍ MĚSTA OLOMOUCE



Obrázek 4: Porovnání velikosti města Olomouc v letech 1926 a 2006.

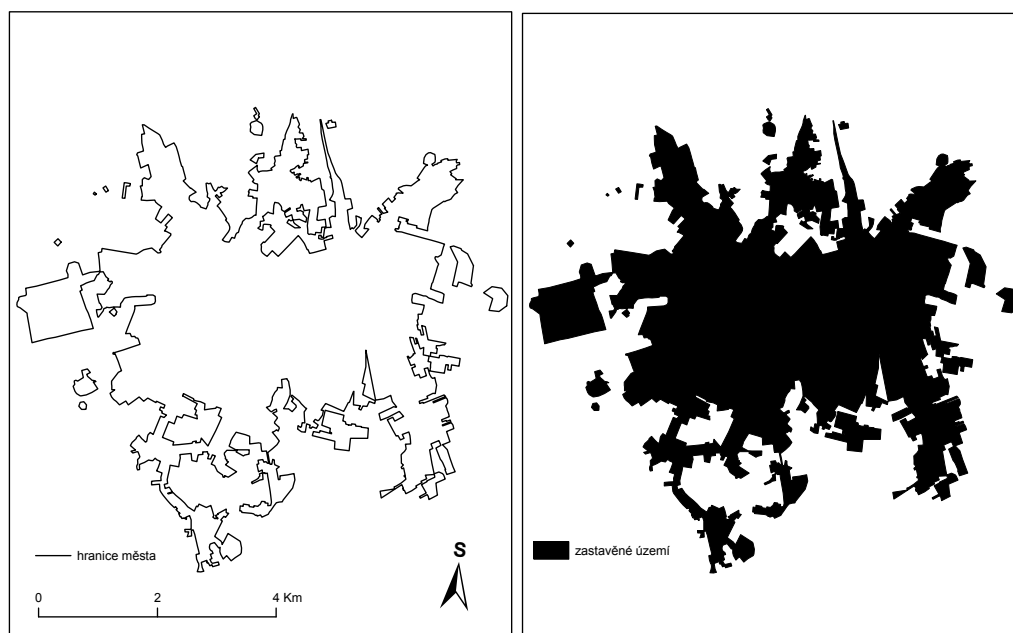
5.2 Pracovní hypotéza

Při analýze fraktálních charakteristik urbánního vývoje města Olomouc se studie zaměřila na následující aspekty:

- Jak se mění komplexnost města v čase?
- Je možné tento vývoj nějak popsat?
- Je možné předpovědět vývoj města na základě těchto údajů?

Zajímavou analogii mezi tvarem raně novověkých pevností a Kochovy vločky ukazují [1] (viz obr. 6). S ohledem na historický vývoj města Olomouc [42] a na jeho status jedné z nejvýznamnějších pevností na Moravě, je zajímavé sledovat, zda se fraktální dimenze tvaru města blíží fraktální dimenzi Kochovy vločky. Na obr. 4 si vizuálně můžeme ověřit, že tvar městské zástavby Olomouce má přibližně hvězdicový tvar, a fraktální dimenze jeho obvodu by se tedy měla blížit hodnotě 1,62, což je fraktální dimenze Kochovy křivky.

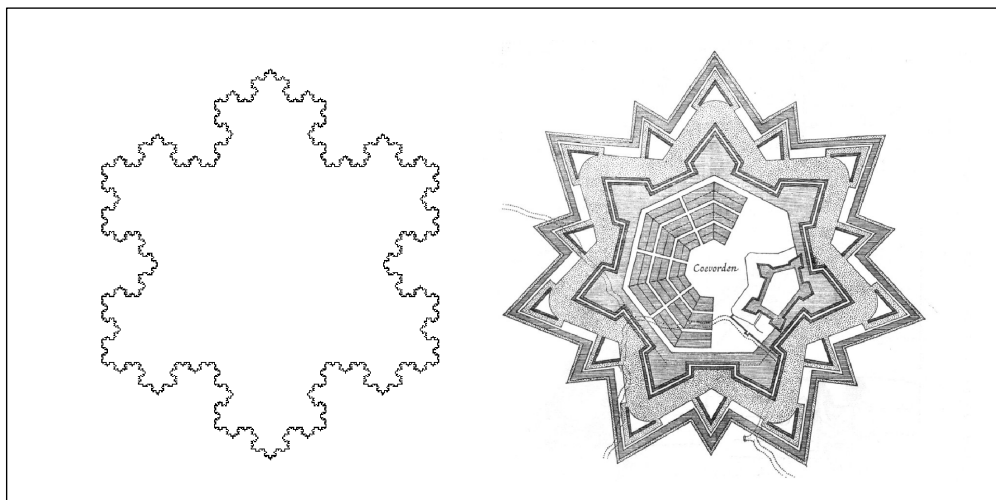
HRANICE MĚSTA OLOMOUC A JEHO ZASTAVĚNÉ ÚZEMÍ V ROCE 1978



Obrázek 5: Hranice města Olomouc a jeho zastavěné území v roce 1978.

5.3 Výsledky

Nejprve okomentujme růst města Olomouce v čase tak, jak se jeví z leteckých snímků. Historické centrum města, vymezené rozsahem městského opevnění, je obehnáno pásem parků, za nimiž následují vily a městské rodinné domy. Tento stav sledujeme už na snímku z roku 1926. Vzhledem k tomu, že snímkování z let 1953-4 se nepodařilo pořídit v kompletním geografickém rozsahu, další snímky pocházejí až z let 1971, respektive 1978 a ukazují mohutný růst, který nastal v okrajových částech města, a který nebylo možné sledovat postupně. Zejména na jihu města došlo k dramatické výstavbě panelových domů, a všechny osady, které byly ve 20. letech samostatné, jsou už územně spojeny s Olomoucí (Neředín, Slavonín, Holice apod.) Růst panelové zástavby pokračuje do 80. let. V 90. letech se růst zpomaluje (plocha města se od roku 1991 po současnost zvětšila o necelé 2 km²). Po roce 2000 pak sledujeme spíše než výstavbu ploch bydlení budování plošně rozsáhlých nákupních zón a logistických center, opět na jihu města.



Obrázek 6: Podobnost Kochovy vločky a ideálu městského opevnění (dle [4], upraveno).

Výsledky fraktální analýzy jsou uvedeny v tabulce 2.

Z tabulky je zřejmé, že jak plocha, tak její fraktální dimenze se v čase zvyšují. Obvod (a jeho fraktální dimenze), na druhou stranu, nemají jasně patrný trend. Zatímco u obvodu nejsme schopni žádný trend určit, fraktální dimenze obvodu se blíží hodnotě 1,72. S výjimkou roku 1926, kdy suburbánní zázemí Olomouce bylo tvořeno řadou odlehlých osad, všechny ostatní hodnoty se pohybují kolem zmíněných 1,72. Jak jsme ukázali v kapitole 3.1, vločka Kochové má fraktální dimenzi 1,62, což je hodnota, která se příliš neliší od zde vypočtených 1,72. Hvězdicovitý tvar současného zastavěného území však nevznikl jen v důsledku ovlivnění původní bastionovou pevností. Na obr. 4 můžeme srovnat stav zastavěného území v letech 1926 a 2006. Je vidět, že růst města byl realizován primárně ve směru stávajících osad.

Bylo zjištěno, že fraktální dimenze plochy města je přímo úměrná velikosti zastavěné plochy. S rostoucí plochou se tedy tvar, který město v prostoru zaujímá, zesložituje. Toto je známý fakt, který byl pozorován na příkladech Londýn (fraktální dimenze vzrostla z 1,332 v roce 1820 na 1,791 v roce 1962) či Berlína (nárůst z 1,43 na 1,69 mezi lety 1875 a 1945) [34].

Vzhledem k tomu, že tato závislost je lineární, je možné předpovědět, jak bude

Rok	Plocha (km^2)	D_{plocha}	Obvod (km)	D_{obvod}
1927	10,485	1,683	106,57	1,363
1971	21,188	1,758	116,61	1,284
1978	23,780	1,780	117,14	1,285
1991	28,028	1,808	108,12	1,268
2001	28,726	1,813	112,29	1,274
2003	29,064	1,816	111,28	1,272
2004	29,639	1,816	112,36	1,272

Tabulka 2: Naměřené charakteristiky zastavěného území města Olomouc.

komplexnost města růst s pokračujícím růstem města. Závislost mezi plochou a její fraktální dimenzí může být vyjádřena následující rovnicí:

$$D = 1.609103 + 0.007081 * Plocha.$$

V kapitole 2.2 bylo ukázáno, že fraktály mají Hausdorffovu dimenzi ostře menší než dimenzi topologickou. Pro tvary v ploše to tedy bude dimenze menší než číslo 2. Z výše uvedeného vztahu můžeme odvodit, že aby fraktální dimenze Olomouce byla rovna dvěma, muselo by město zabírat plochu 55,2 km^2 . Vzhledem k tomu, že současná plocha zastavěného území je pouze 29,6 km^2 , čili něco více než polovina vypočtené plochy odpovídající dimenzi rovné dvěma, nelze spolehlivě předpovědět, jaký bude další vývoj městské výstavby. Za předpokladu, že vztah mezi plochou a její fraktální dimenzí bude nadále lineární, lze navrhnout dva možné scénáře:

- Plocha 55,2 km^2 je kritická hodnota, které město nikdy nedosáhne, růst se zastaví před tím, než město dosáhne této velikosti.
- Jakmile město dosáhne plochy 55,2 km^2 , jeho komplexnost v ploše se nebude moci dále zvětšovat a růst tedy bude probíhat ve třetí dimenzi - výstavbou výškových domů, přičemž fraktální dimenze i plocha města dále porostou.

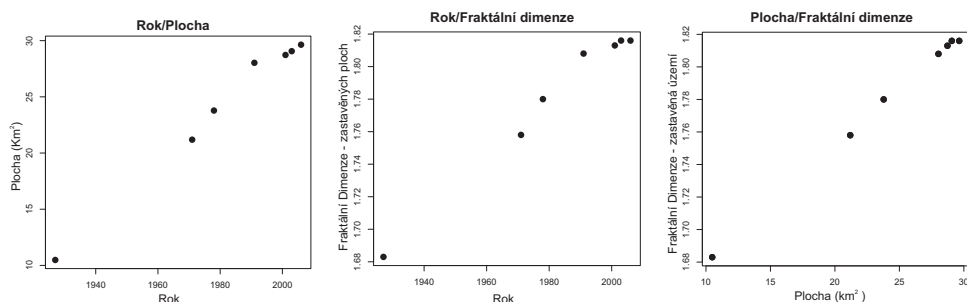
Dimenzi rovnou dvěma mají pouze geometricky hladké útvary, tedy například čtverec nebo kruh, přičemž můžeme tvrdit, že město by obsadilo spíše tvar

kruhu než čtverce. Kruh s plochou $55,2 \text{ km}^2$ má poloměr cca $4,2 \text{ km}$, přičemž vzdálenost z centra Olomouce na okraj jeho nejvzdálenějších částí je v současnosti přibližně 4 km . Z toho lze dovodit, že jakýkoli další růst města se bude odehrávat ve vzdálenosti maximálně $4,2 \text{ km}$ od centra města a že výstavba se bude odehrávat tak, aby vyplnila kruhový prostor.

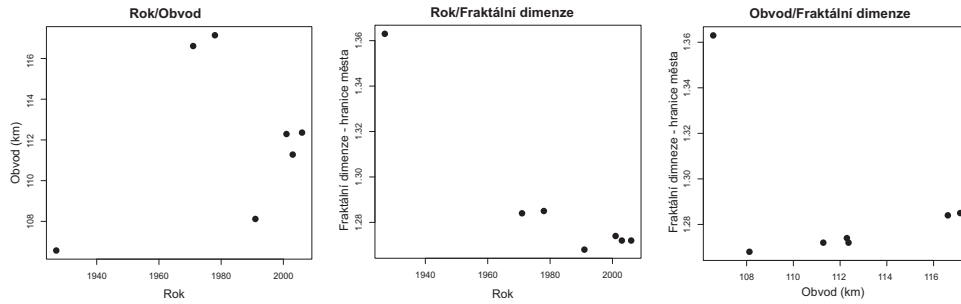
Naopak fraktální dimenze obvodu tohoto tvaru zůstává přibližně stejná (s výjimkou prvního roku, kdy byl Olomouc oddělen od řady osad, které jsou dnes jeho součástí). Žádný geometricky hladký útvar nemůže mít plochu s dimenzí celočíselnou (v tomto případě 2) a zároveň mít obvod s dimenzí fraktální (1,272). Proto se můžeme přiklonit první hypotéze, a to sice, že město Olomouc nikdy nedosáhne plochy, která by odpovídala dimenzi 2 (při zachování lineární závislosti mezi plochou a její fraktální dimenzí).

Proti tomuto tvrzení je výzkum [1], kteří ukázali, že fraktální dimenze městského okraje města Cardiff se zmenšila mezi lety 1886 a 1996. I u Olomouce pozorujeme zmenšení fraktální dimenze mezi lety 1926 a 2006, nicméně obr. 8 ukazuje, že s výjimkou roku 1926 zůstává fraktální dimenze okraje města přibližně stejná. Z dostupných dat nelze spolehlivě určit, jestli je trend hyperbolický, lineárně sestupný, nebo konstantní v čase a údaj z roku 1926 je jen odlehlou hodnotou.

Vztahy mezi časem, plochou zastavěného území, respektive obvodu hranice města a jejich fraktální dimenzí jsou souhrně zobrazeny na obrázcích 7 a 8.



Obrázek 7: Vztahy mezi plochou města, její fraktální dimenzí a časem



Obrázek 8: Vztahy mezi délkou hranice města, její fraktální dimenzí a časem

5.4 Diskuze

Fakt, že fraktální dimenze je validní ukazatel urbánního růstu je dobře známý [1]. V této studii jsme ukázali, že fraktální dimenze může být použita nejen k popisu urbánního vývoje v minulosti, ale že může sloužit i jako nástroj pro předpovídání chování tohoto systému v budoucnosti. Ukázali jsme, že existuje lineární závislost mezi velikostí zastavěné plochy a její fraktální dimenzí. Zároveň jsme ukázali, že totéž neplatí pro obvod a jeho fraktální dimenzi, respektive, že zatímco komplexnost plochy, kterou město vyplňuje, v čase roste, komplexnost obvodu města zůstává stejná. Toto je důležitý poznatek, protože ačkoli během 80 let, ve kterých jsme urbánní systém města Olomouce sledovali, se vystřídalo mnoho různých přístupů k výstavbě města, tyto zákonitosti zůstávaly v čase neměnné.

Dále jsme na základě těchto zákonitostí předpověděli plochu, která by odpovídala stavu, kdy plocha městské zástavby bude mít fraktální dimenzi rovnou dvěma. Nicméně taková fraktální dimenze ještě nebyla u žádného města pozorována. Nejvyšší fraktální dimenze byly pozorována u Pekingu, a to 1,96. [12]. Zároveň všam musíme podotknout, že růst města je realizován i ve vertikální dimenzi, s čímž současné analýzy nepočítají. Vertikální růst je sice oproti horizontálnímu minimální, ale pro korektnost by s ním mělo být počítáno.

Fraktální dimenze může být užitečným nástrojem pro územní plánovače, protože poskytuje jednočíselný, lehce interpretovatelný popis složitosti tvarů. Na druhou stranu, možnosti predikce vývoje jsou velmi malé a omezené na simulace takových fraktálních struktur, které lze popsat matematickým předpisem.

Řešením by mohlo být provedení mnoha simulací (například použitím celulárních automat) a vybrání toho řešení, které poskytuje nejlepší výsledky s ohledem k předpovídané komplexnosti budoucího tvaru městské zástavby.

Vyhledem k tomu, že studie bylo provedena na základě dat z jednoho jediného města, výsledky a závěry zde prezentované nemusí být obecně aplikovatelné. Zejména u měst, které vznikaly za úplně odlišných historických podmínek v odlišném geografickém prostředí by mohly být zde prezentované závislosti neplatné.

Trend rostoucí složitosti města, pozorovaný jak zde, tak i u dalších měst (viz. [1], [34]) je však univerzálním pravidlem, které by mělo být aplikovatelné na jakémkoli sídle.

Kromě samotného software, v němž je analýza prováděna (viz kapitola 8.1) je ještě jeden faktor, který má vysoký vliv na výsledky analýzy, a to velikost zájmového území.

Rozsah zájmového území definuje prostor, ve kterém se město může vyvíjet a také, které osídlení budou do analýzy zahrnuty. Pokud bude zájmové území zmenšeno, budeme nutné vyřadit i některá z okolních osídlení. Tato osídlení mohou mít aktivní vliv na růst města - město se může vyvíjet v jejich směru, tak jak to bylo pozorováno mezi lety 1926 a 1971 na leteckých snímcích. Výsledná fraktální dimenze pak bude vyšší. Naopak pokud bude zájmové území zvětšeno, bude nutno zahrnout do analýzy všechny sídla v novém rozsahu. Tato sídla nemusí mít žádný vliv na urbánní vývoj města, ale po provedení analýzy by vypočtená fraktální dimenze byla nižší.

Je tedy nutné správně určit geografický rozsah analýzy. V této studii byla vybrána ta sídla, které se eventuelně prostorově spojila s Olomoucí. Předpokládáme, že u ostatních sídel v okolí Olomouce je jejich urbánní vývoj ovlivňován Olomoucí a ne naopak. Tedy že Olomouc se nebude vyvíjet ve směru těchto osídlení (například Bystrovany, Křelov, Samotíšky).

Zahrnutí nových osídlení by mělo mít vliv pouze na fraktální dimenzi za-

stavěného území, ne na fraktální dimenzi hranice zastavěného území - ta by měla zůstat stejná.

Prezentované výsledky o maximální ploše, kterou může město zaujímat jsou tedy aplikovatelné jen v idealizovaném světě, kde růst města není ovlivňován okolními sídly a není výrazně limitován reliéfem. Přednesená hypotéza, že město se v čase snaží obsadit plochu co nejpodobnější kruhu dává smysl i s ohledem na minimalizaci výdajů.

5.5 Závěr

Studie se zaměřila na fraktální analýzu urbánního růstu města Olomouc mezi lety 1926 a 2006. Byla měřena fraktální dimenze zastavěného území a rovněž fraktální dimenze okraje města. Výsledky jasně ukazují, že fraktální dimenze zastavěného území s časem a plochou roste. Tedy čím je město větší, tím je vyšší jeho složitost a tím více se blíží geometricky hladkému útvaru, jakým je například kruh. Naopak při sledování změny fraktální dimenze městského kraje v čase nemůžeme učinit jednoznačný závěr. Zřejmé je, že data z let 1971 až 2006 ukazují konstantní trend s hodnotou blízkou 1,72. To je hodnota blízká fraktální dimenzi Kochovy vločky.

Jsou předneseny závěry týkající se pozorovaných trendů a jejich možné interpretace. Je zmíněna možnost využití fraktální dimenze při územním plánování. Rovněž je poukázáno na možné nedostatky přednesených závěrů a čtenáři je doporučeno, aby nahlížel na prezentované závěry a interpretace kriticky.

6 Případová studie 2: Fraktální charakteristiky morfologie listů jako podklad pro klasifikaci geodat

Cílem studie je vyzkoušet možnosti automatické klasifikace založené na fraktálních charakteristikách tvarů. Vstupními daty analýz byly listy sedmi druhů rostlin, běžně se vyskytujících v podmínkách ČR. Těchto sedm druhů patří do tří čeledí, které se od sebe výrazně liší, co se týká morfologie tvaru listů. Je vhodnější použít tento studijní materiál než geografická data, neboť je předem exaktně známo rozdělení do tříd a rovněž je možné lehce pořídit velké množství kvalitních dat. Až pokud se na těchto datech prokáže, že fraktální charakteristiky mohou sloužit k účelům automatické klasifikace objektů, je možné použít tyto poznatky na geografická data.

6.1 Data a jejich zpracování

Pro účely diplomové práce byly zapůjčeny herbářové položky od Katedra botaniky Přírodovědecké fakulty UP. Bylo vypůjčeno celkem přes 140 listů rostlin, řadících se do čeledí Blechnaceae, Dryopteridaceae a Rosaceae. Konkrétně šlo o druhy: *Blechnum spicant* (Blechnaceae), *Dryopteris carthusiana* (Dryopteridaceae), *Dryopteris filix-mas* (Dryopteridaceae), *Polystichum aculeatum* (Dryopteridaceae), *Alchemilla vulgaris* (Rosaceae), *Rubus wimmerianus* (Rosaceae), *Fragaria moschata* (Rosaceae).

Všechny listy byly naskenovány následovně upraveny tak, aby vznikly černobílé obrazové záznamy. Na jednom z nich je celý list, na druhém jen jeho kostra, skelet.

Zastoupení druhů v každé čeledi nebylo stejné, stejně tak počet pozorování byl rozdílný u každého druhu, jak ukazuje tabulka 3.

K dispozici tedy byla informace o prostoru, který každý list zabírá (obrázek 9 uprostřed) a o vnitřní struktuře listu (obrázek 9 vpravo). Tyto dvě informace pak byly zkoumány metodou fraktální analýzy. Opět bylo použito me-

Čeď	Druh	Počet listů
Blechnaceae	Blechnum spicant	15
Dryopteriaceae	Dryopteris carthusiana	19
	Dryopteris filix-mas	17
	Polystichum braunii	18
Roseaceae	Alchemilla	21
	Fragaria	21
	Rubus	22

Tabulka 3: Počet pozorování ve čedích a druzích



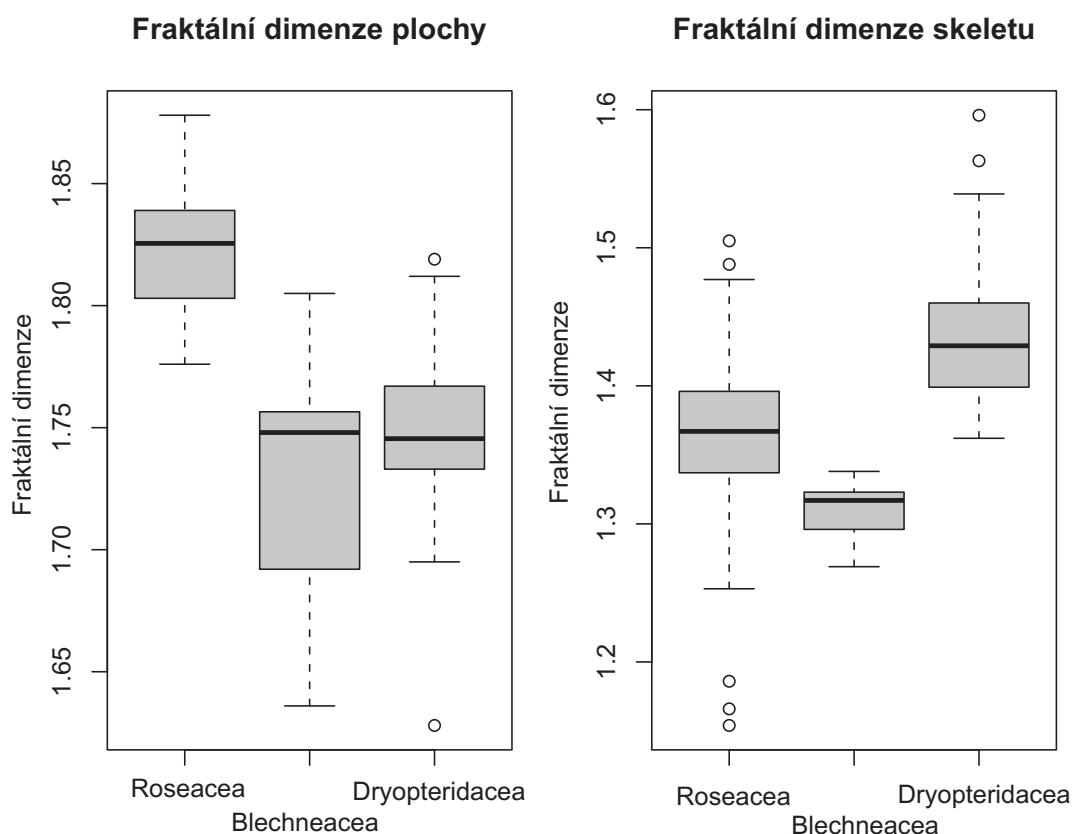
Obrázek 9: Vstupní data analýz - původní sken, úprava na černobílý obraz, skelet listu (zleva doprava)

tody box-counting v programovém prostředí Fractalyse. Nebyly měřeny žádné další charakteristiky listů. Používání kvantitativních charakteristik v morfometrii a taxonomii je dobře zdokumentované a úspěšné (za všechny například [10]). Cílem této úlohy je ověřit, zda i samotné charakteristiky tvaru a komplexnosti (ne metrická měření) mohou přispět k úspěšnému rozlišení mezi několika třídami, respektive k zařazení do správné třídy. Touto tematikou se už dříve zabývala řada výzkumníků, například [2] ve velmi komplexní studii ukázal užitečnost fraktální dimenze při popisu tvaru listů, nicméně jeho výsledky se opírají o řadu dalších charakteristik, včetně metrických. V jiné studii zkoumá [25] listy vinné révy jen z pohledu jejich fraktální dimenze s uspokojivými výsledky, nezabývá se ale možnostmi klasifikace.

Tato studie má za úkol ukázat, že i pouhé dvě fraktální charakteristiky - komplexnosti zaujímané plochy v prostoru a komplexnost skeletu listu - v sobě ukrývají dostatek informace k úspěšné klasifikaci listů do příslušných tříd.

6.2 Metody

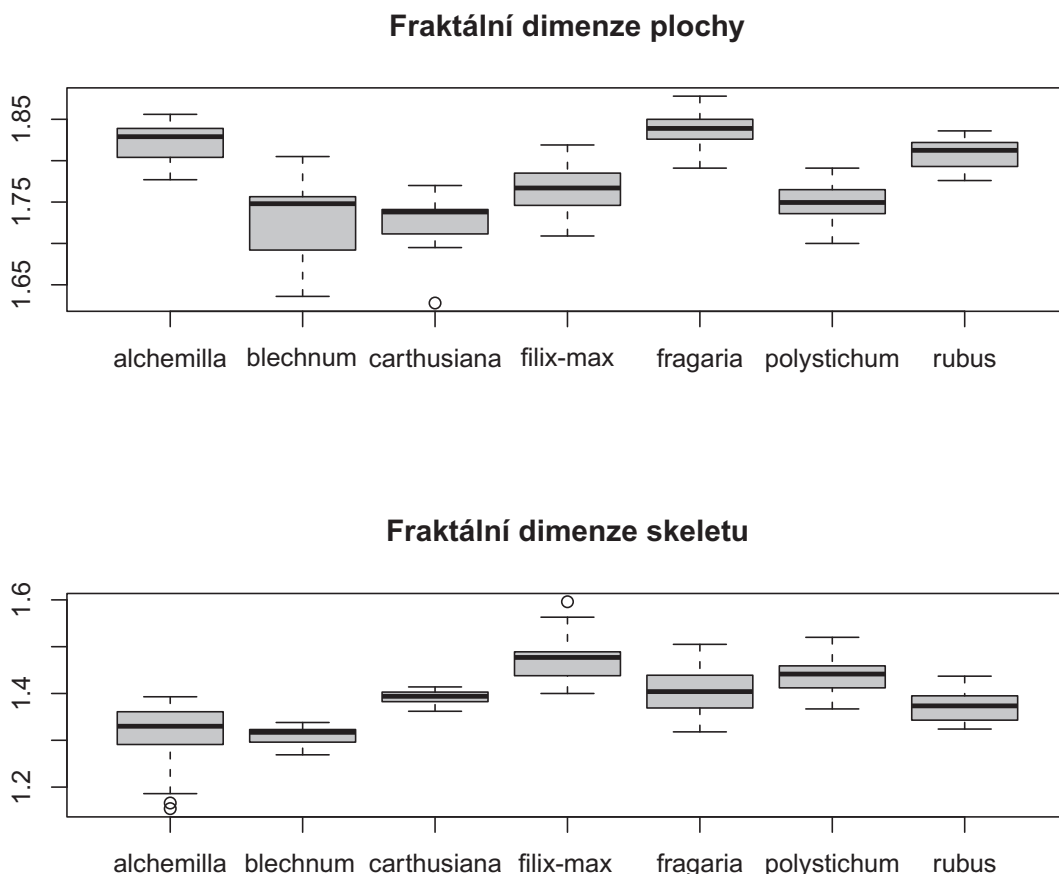
Data byla nejprve graficky vyšetřena. Bylo zkoumáno rozdělení hodnot v rámci čeledí (obrázek 10) i v rámci druhů (obrázek 11). Z obrázků lze usuzovat na



Obrázek 10: Boxplot hodnot fraktální dimenze pro čeledi

normální rozdělení v rámci skupin, což je jedním ze základních předpokladů diskriminační analýzy (viz kapitola 4.3). Toto bylo ověřeno Shapiro-Wilkovým testem na hladině významnosti $\alpha = 0.05$.

U čeledí byla všechna rozdělení pro fraktální dimenzi plochy listu v rámci skupin ohodnocena jako normální (na zvolené hladině významnosti nelze zamítnout nulovou hypotézu). U fraktální dimenze skeletu byla zamítnuta nulová hypotéza u čeledí Dryopteridaceae a Roseacea. Pokud by byla nenormalita způsobena odlehlými hodnotami a nikoli zešikmením rozdělení, bylo by nutné tyto hodnoty z analýzy vyřadit, protože diskriminační analýza je na tento druh porušení



Obrázek 11: Boxplot hodnot fraktální dimenze pro druhy

normality náchylná [32]. Po vyřazení těchto hodnot a opětovném testování normality byly výsledky stejné jako při zachování odlehlých hodnot. Proto můžeme usuzovat, že nenormalita je výsledkem zešikmení dat, což je porušení předpokladu, se kterým si dokáže diskriminační analýza poradit [32].

Dále došlo k vyšetření rovnosti mediánů pomocí ANOVY. Protože jsou data normálně rozdělená, je klasická ANOVA vhodnější než Kruskal-Wallisův test, který je metodou neparametrickou. ANOVA ukázala, že mediány uvnitř skupin (jak čeledí, tak druhů) se signifikantně liší. To je základním předpokladem pro diskriminační analýzu.

6.3 Výsledky

Cílem diskriminační analýzy bylo ověřit myšlenku, že na základě fraktálních parametrů listů lze úspěšně klasifikovat listy do příslušných tříd. Parametry, dle nichž probíhala diskriminace, byly fraktální dimenze plochy a fraktální di-

		Skutečné zařazení		
		Roseacea	Blechnaceae	Dryopteridaceae
Výsledek modelu	Roseacea	16	0	1
	Blechnaceae	1	2	0
	Dryopteridaceae	0	0	14

Tabulka 4: Výsledky diskriminační analýzy zařazení do příslušných čeledí

menze skeletu. Jako třídy posloužily jednak čeledi, tak i jednotlivé druhy.

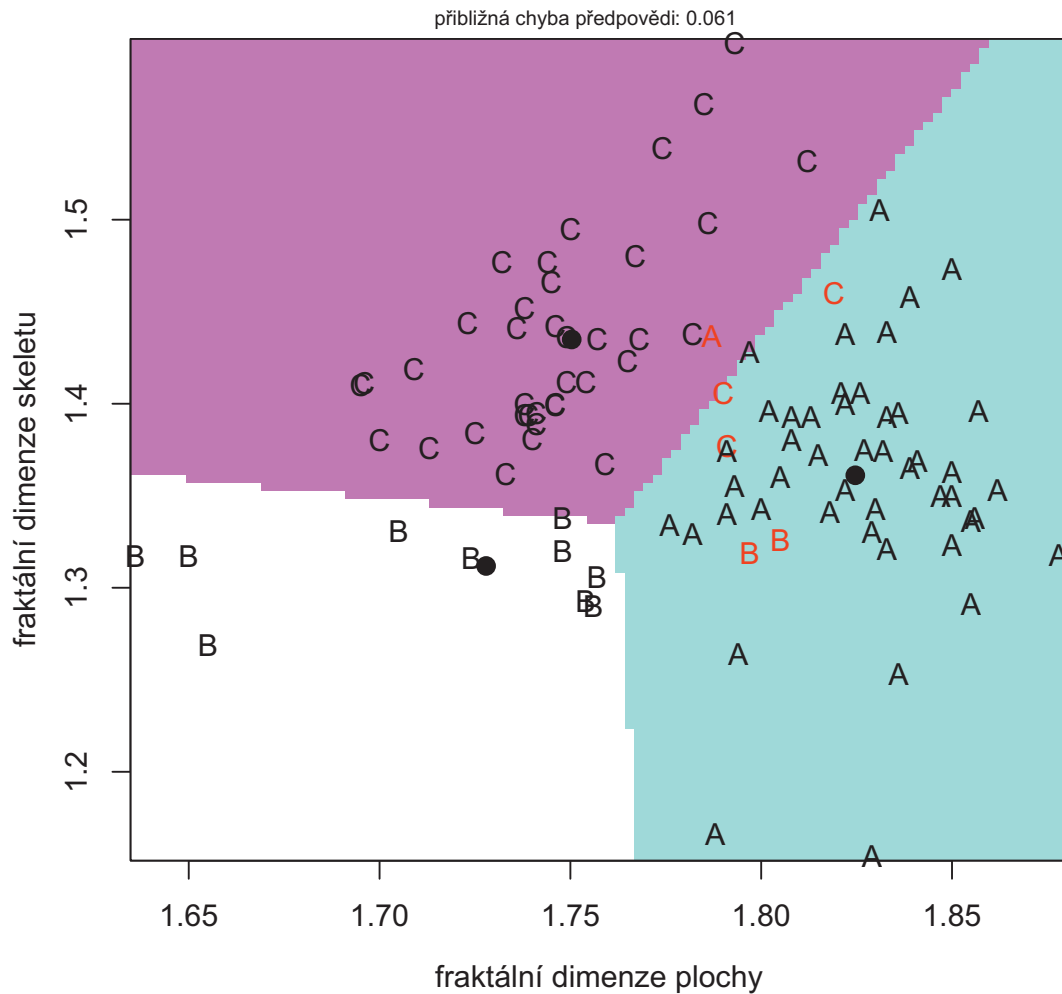
Nejprve byla testována úspěšnost při klasifikaci do tříd. Prvním krokem bylo vytvoření kontrolního datasetu. Tento dataset tvořila jedna čtvrtina dat. Vzhledem k tomu, že data nebyla řazena podle žádného klíče, byla kontrolní skupina pořízena prostým výběrem každého čtvrtého prvku původního datasetu. Všechna data, která nepatřila do kontrolního datasetu, tvořila trénovací dataset. Kontrolní dataset tvořilo 34 pozorování, trénovací dataset čítal 99 pozorování, přičemž byl zachován poměr mezi prvky v trénovacím a kontrolním datasetu pro každou čeleď.

Na trénovacím datasetu byla provedena lineární diskriminační analýza v programovém prostředí R (příkaz `lda()` z balíčku `MASS`). Na kontrolním vzorku pak byla testována úspěšnost předpovědi. Výsledky jsou v tabulce 4. U čeledí *Roseacea* a *Dryopteridaceae* byla úspěšnost předpovědi vysoká - 94,1 %, respektive 100 %. Úspěšnost předpovědi u *Blechnaceae* byla sice jen 66,6 %, což ale může být dáno velmi nízkým počtem zástupců této čeledi v kontrolním vzorku. Celková úspěšnost je 94,1 %, což je velmi dobrý výsledek.

Vzhledem k tomu, že se pohybujeme jen ve dvourozměrném prostoru, je možné výsledky přehledně vizualizovat.

Druhým úkolem bylo testovat úspěšnost zařazení k jednotlivým druhům. Vzhledem k malému počtu vstupních dat a naopak poměrně vysokému počtu tříd bylo upuštěno od rozdělení datasetu na kontrolní a trénovací vzorek. Trénování probíhalo přímo na množině dat, která pak byla evaluována. Stejným postupem - tedy lineární diskriminační analýzou v prostředí R - byly získány následující výsledky:

Výsledky diskriminační analýzy



Obrázek 12: Výsledky diskriminační analýzy pro čeledi

Celková úspěšnost zařazení je jen 66,2 %, úspěšnost zařazení k jednotlivým rodům se pohybuje mezi 47 a 90 %, většinou je však okolo 65 %. Tento výsledek není úplně špatný, nicméně nedá se říct, že by na základě pouhé fraktální dimenze bylo možné detailně rozlišovat mezi jednotlivými druhy rostlin.

6.4 Diskuze

Úspěšnost předpovědi se výrazně liší při řazení do čeledí a při řazení k jednotlivým druhům. Listy druhů, patřící do jedné čeledi, se tvarově neliší tolik, jako listy druhů z jiné čeledi. Tyto zásadní rozdíly v tvarech se podařilo pomocí fraktální dimenze odhalit a popsat. Nicméně fraktální dimenze ne-

		Skutečné zařazení						
		alch	ble	cart	f-m	fra	poly	rub
Výsledek modelu	alch	13	0	0	0	2	0	6
	ble	3	11	1	0	0	0	6
	cart	0	0	17	0	0	2	0
	f-m	0	0	2	8	1	6	0
	fra	3	0	0	1	15	0	2
	poly	0	0	3	4	0	9	2
	rub	3	0	0	0	3	1	15

Tabulka 5: Výsledky diskriminační analýzy zařazení k příslušným rodům

dokázala rozlišit mezi jednotlivými druhy, kde jsou rozdíly detailnější a spíše než ve tvaru je lze pozorovat ve velikostech a jiných kvantitativních charakteristikách.

Zdá se tedy, že fraktální analýza je schopná rozlišovat mezi tvary, výrazně se lišícími a to bez ohledu na jejich velikost. Není ale schopna zachytit detaily. Tato robustnost sice limituje využití u řady studií, v jistých případech ale může být vítanou vlastností.

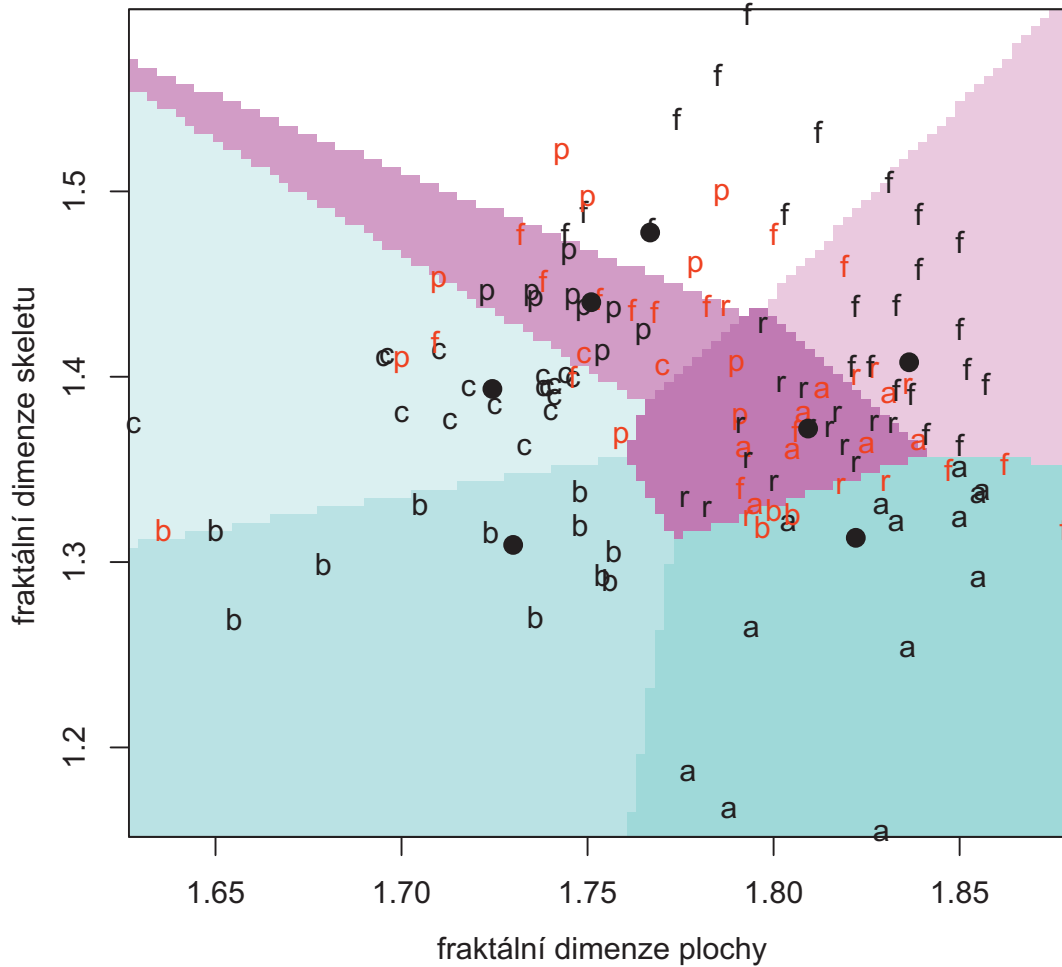
Vztáhneme-li toto na geoinformatiku, nabízí se řada úloh, kde je klasifikace pomocí fraktální analýzy možné použít.

Například budeme-li se zabývat geografii měst, je určitě zajímavé dívat se na síť ulic, půdorysné struktury apod. Tyto vzorce jsou tvarově charakteristické, podmíněné historickými i fyzickogeografickými podmínkami. Přitom se budou město od města lišit co se týká rozsahu, plochy, kterou okupují a budou zde i další lokální rozdíly. Fraktální dimenze poskytuje nástroj pro porovnávání těchto struktur, přičemž pokud použijeme závěry z této kapitoly, měla by být schopná odlišit mezi morfologicky výraznými strukturami a lokální rozdíly by neměly mít na výsledek výrazný vliv.

Jiným příkladem může být studium říčních sítí. Tvar říčních sítí je ovlivňován ve velké míře tektonickými procesy, stejně jako erozí a dalšími geomorfolo-

Výsledky diskriminační analýzy

přibližná chyba předpovědi: 0.338



Obrázek 13: Výsledky diskriminační analýzy pro druhy

gickými procesy [31], a na základě jejího tvaru tedy můžeme usuzovat na geologickou minulost regionu. V současnosti, kdy pořízení dat je stále menším problémem a existují rozsáhlé globální databáze pokrývající celou škálu témat, je provedení podobné analýzy lehce uskutečnitelné. Nabízí se například zkoumání fraktální dimenze (i dalších tvarových charakteristik) říční sítě libovolné oblasti a na základě porovnání s dobře prozkoumanými regiony pak usuzování na procesy, které se účastnily formování georeliéfu.

Platí však, že fraktální analýzu zřejmě nelze použít při popisu detailních rozdílů, kde se jako lepší řešení jeví metrické charakteristiky.

6.5 Závěr

V souladu s jinými studii, které se zabývaly možnostmi využití fraktální dimenze při taxonomii a morfometrii ([2],[25]), i zde můžeme tvrdit, že fraktální analýza se ukázala jako vhodný nástroj popisu morfologie listů. Cenná je především proto, že umožňuje přímo porovnávat jakékoli tvary na základě jejich složitosti, bez ohledu na metrické jednotky.

Ukázalo se, že na základě pouhých dvou fraktálních charakteristik bylo možné úspěšně separovat druhy, patřící do tří odlišných čeledí. Úspěšnost předpovědi blížící se k 95 % je velice vysoká a při použití pouhých dvou charakteristik se jedná o velmi dobrý výsledek. Klasifikace k jednotlivým druhům už tak úspěšná nebyla. Ukázalo se, že dochází k značnému překryvu hodnot v rámci čeledí a lineární diskriminační analýza nedokáže data úspěšně separovat. Z obrázku 12 se zdá, že ani nelineární klasifikace by nedosáhla lepšího výsledku.

Výsledky ukazují, že fraktální dimenze dokáže dobře charakterizovat takové struktury, které jsou tvarově výrazně odlišné - a to bez ohledu na rozměry a další metrické charakteristiky - ale nedokáže již úspěšně zachytit detaily.

7 Případová studie 3: Vztah mezi geometrií a využitím funkčních ploch

Cílem práce je zjistit, zda lze popsat kategorie funkčních ploch města pouze na základě jejich geometrických charakteristik. Pokud by se ukázalo, že se jednotlivé typy funkčních plochy geometricky liší, bylo by tyto poznatky možné použít např. při územním plánování.

Výsledky předchozí studie napovídají, že pokud existují mezi jednotlivými kategoriemi ZFP (základních funkčních ploch) výrazné tvarové odlišnosti, bude možné je odhalit pomocí metod vícerozměrné statistické analýzy.

Byla použita data ÚAP (/zemně analytické podklady) z magistrátu města Olomouce, platná pro rok XXX. Základní funkční plochy obsahovaly 2342 ploch řadících se k jednomu z 47 typů, což je ovšem pro klasifikaci příliš vysoké číslo. Proto byly plochy rozřazeny do následujících 9 kategorií: dopravní plochy, obytné plochy, technická zařízení, veřejné vybavení, vodní plochy, výrobní plochy, zeleň, zemědělské plochy, ostatní.

7.1 Měřené charakteristiky

U všech ploch byly měřeny následující charakteristiky:

Plocha: měřeno nástrojem *Calculate Geometry* v ArcGIS.

Obvod: měřeno nástrojem *Calculate Geometry* v ArcGIS.

Tvar plošky: vyjadřuje kompaktnost plochy, tedy nakolik se plocha svým tvarem blíží kruhu [11].

$$SI = \frac{P}{2 * \sqrt{\pi * A}},$$

kde v čitateli je obvod plochy a ve jmenovateli je obvod kruhu o stejném obsahu jako má sledovaná plocha. Pro plochu o tvaru kruhu je hodnota rovna jedné, pro jakýkoli jiný tvar je vyšší.

Míra komplexnosti: v krajinné ekologii se tato metrika označuje jako fraktální dimenze [11], nicméně se skutečnou fraktální dimenzí má společného jen málo [37]. Zde budeme tuto metriku používat proto, že je běžně užívaná při analýze

krajiny a také proto, že odhad skutečné fraktální dimenze je náročný jak časově, tak co se týká softwarových možností. Při takovém množství ploch, se kterými bylo počítáno v této úloze, je pak téměř vyloučeno počítat skutečnou fraktální dimenzi každé jednotlivé z nich.

Míru komplexnosti vypočteme podle vzorce, který se objevil už v kapitole 3.3:

$$D = \frac{2 * \log(p)}{\log(A)},$$

kde p je obvod polygonu a A je jeho plocha. I když se nejedná o skutečnou fraktální dimenzi, je tato metrika rozhodně mírou komplexnosti tvaru, což plně vyhovuje cíli studie.

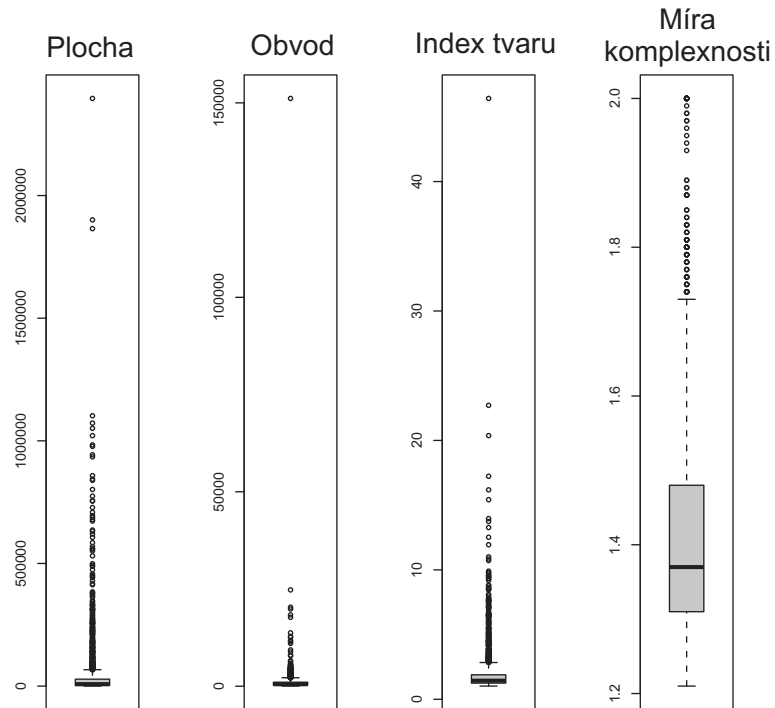
7.2 Metody

7.2.1 Vyšetření korelace proměnných

Nejprve bylo třeba zjistit, jaké vztahy existují mezi čtveřicí měřených proměnných bez ohledu na zařazení do skupin. Bylo použito jak grafické analýzy, tak statistických metod.

Pomocí krabicového grafu se lze vizuálně přesvědčit, že rozdělení hodnot je silně zešikmené a předpoklady normality jsou výrazně porušeny. Normalita v rámci skupin byla zkoumána Shapiro-Wilkovým testem (viz podkapitola 4.1). Dále byla zkoumána korelace mezi proměnnými. Bylo použito Pearsonova koeficientu korelace, Kendallova τ a Spearmanova koeficientu pořadové korelace ρ (všechny metody detailně popsány například v [18]). Byly provedeny testy významnosti zjištěných koeficientů a výsledky jsou uvedeny v tabulkách 6,7,8. NS jsou označeny koeficienty, které nebyly vyhodnoceny jako signifikantní na hladině významnosti $\alpha = 0.05$. Grafická reprezentace korelací v datech je uvedena na obrázku 15.

Zatímco Pearsonův korelační koeficient je negativně ovlivněn odlehlými hodnotami, nelinearitou vztahu, nesplněním normality rozdělení a rozdílnými rozptyly porovnávaných rozdělení [18], Spearmanův koeficient pořadové korelace ρ je mnohem robustnější metodou. Vypočítá se aplikováním Pearsonova korelačního koeficientu ne na data samotná, ale na jejich pořadí. Posky-



Obrázek 14: Boxplot hodnot míry komplexnosti

	Plocha	Obvod	Index tvaru	Míra komplexnosti
Plocha	X	0,38	0,04	-0,26
Obvod	0,38	X	0,64	<i>NS</i>
Index tvaru	0,04	0,64	X	0,59
Míra komplexnosti	-0,26	<i>NS</i>	0,59	X

Tabulka 6: Pearsonův korelační koeficient

tuje dobré výsledky tam, kde je vztah mezi proměnnými nelineární, ale monotónní. Kendallovo τ je ekvivalentem Spearmanova ρ co se týče předpokladů. I výsledky bývají podobné, nicméně interpretace se liší. Kendallovo τ vyjařuje rozdíl mezi pravděpodobnostmi, že hodnoty dvou proměnných jsou ve stejném pořadí oproti pravděpodobnosti, že nejsou ve stejném pořadí [5].

Výsledky ukázané v tabulkách 6,7,8 ukazují na silné korelace mezi některými z proměnných. Kromě vztahů mezi indexem tvaru a plochou, respektive obvodem se zdají všechny proměnné být poměrně silně korelovány. Fakt, že Spearmanovo ρ a Kendallovo τ vycházejí výrazně vyšší než Pearsonův korelační koeficient (vztah plocha - míra komplexnosti, plocha - obvod) ukazuje ne ne-

	Plocha	Obvod	Index tvaru	Míra komplexnosti
Plocha	X	0,75	-0,07	-0,59
Obvod	0,75	X	0,19	-0,33
Index tvaru	-0,07	0,19	X	0,50
Míra komplexnosti	-0,59	-0,33	0,50	X

Tabulka 7: Kendallov τ

	Plocha	Obvod	Index tvaru	Míra komplexnosti
Plocha	X	0,89	-0,11	-0,76
Obvod	0,89	X	0,27	-0,43
Index tvaru	-0,11	0,27	X	0,67
Míra komplexnosti	-0,76	-0,43	0,67	X

Tabulka 8: Spearmanův koeficient pořadové korelace ρ

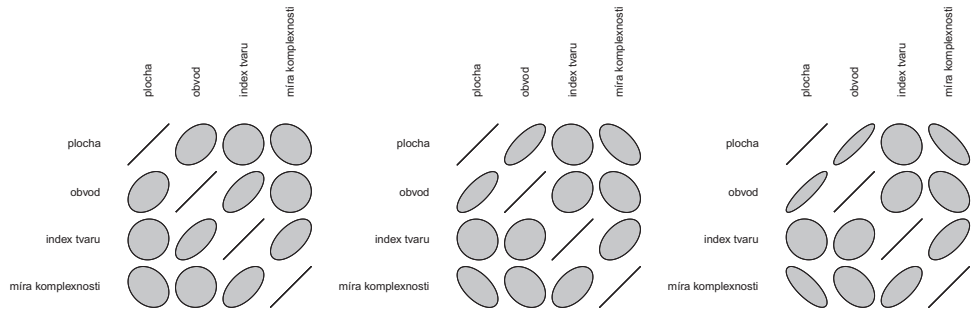
linearitu vztahu. Protože jsou proměnné silně korelovány, nabízí se možnost použít některou z metod redukce dimenze.

7.2.2 Ověření předpokladů pro klasifikaci

Shapiro-Wilkův test byl použit pro ověření normality rozdělení v rámci kategorií využití funkčních ploch pro každou ze čtyř sledovaných proměnných (plocha, obvod, index tvaru, míra komplexity). Pro všechny testovaná rozdělení byla zamítnuta nulová hypotéza o normalitě rozdělení na hladině $\alpha = 0.05$.

Kruskal-Wallisův test byl použit pro potvrzení, že existují signifikantní rozdíly mezi mediány všech sledovaných proměnných. Výsledky byly signifikantní na hladině $\alpha = 0.05$.

Vzhledem k silnému porušení normality a tedy i předpokladů diskriminační analýzy viz kapitola 4.3.1) nebylo možné použít této metody. Místo níbylo použito analýzy klasifikačními stromy, která neklade podmínky na rozdělení dat a je schopná odhalit i nelineární vztahy, které mohou mezi proměnnými existovat. Navíc interpretace klasifikačního stromu je snadnější a přirozenější než interpretace diskriminační funkce.



Obrázek 15: Grafické znázornění korelací v datech: Pearsonův korelační koeficient, Kendallovo τ , Spearmanův koeficient pořadové korelace (zleva doprava)

7.3 Výsledky

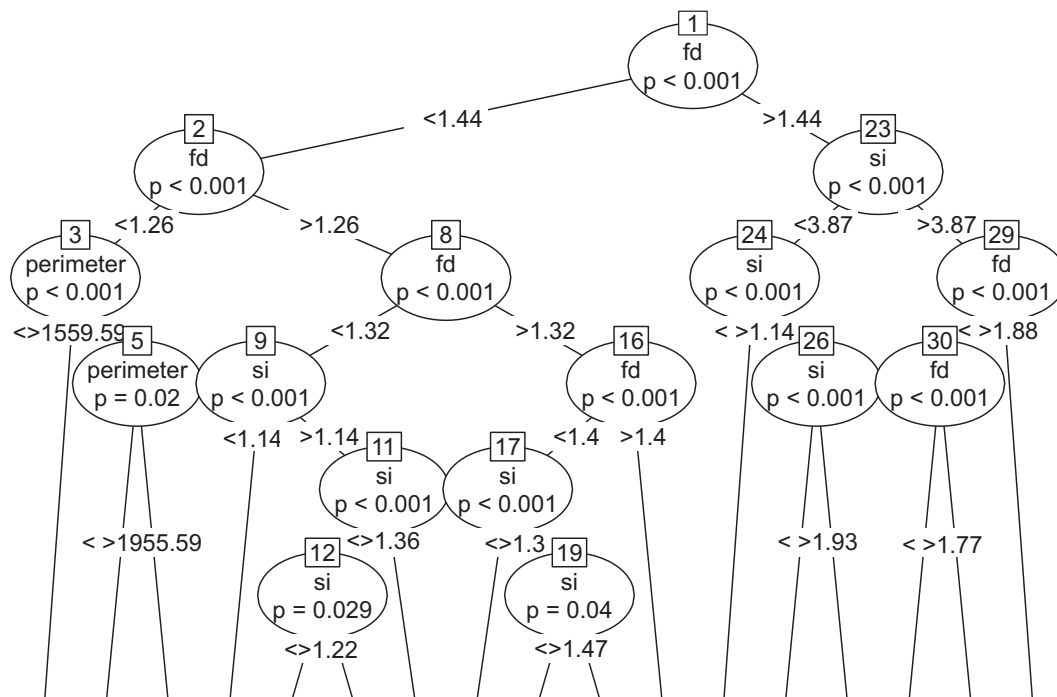
Analýza byla provedena v prostředí R (nástroj `ctree()` v knihovně `party`).

Výsledky analýzy jsou v tabulce 9, reprezentace stromu je na obrázku 16.

		Skutečné zařazení								
		DP	OB	OST	TECH	VÝR	VV	VP	ZEL	ZEM
Výsledek modelu	DP	8	1	0	0	0	0	0	56	41
	OB	1	56	0	0	0	0	0	4	289
	OST	0	7	0	0	0	0	0	3	51
	TECH	0	3	0	0	0	0	0	1	23
	VÝR	0	22	0	0	0	0	0	4	113
	VV	1	22	0	0	0	0	0	1	146
	VP	1	2	0	0	0	0	15	58	74
	ZEL	2	4	0	0	0	0	5	236	348
	ZEM	5	37	0	0	0	0	0	59	643

Tabulka 9: Výsledky klasifikace k příslušným funkčním plochám

Úspěšnost zařazení do jednotlivých tříd funkčních ploch je v tabulce 10. Je vidět, že s výjimkou zemědělských ploch je úspěšnost předpovědi mizivá. Celková úspěšnost je 40,9 %, kromě právě zemědělských ploch ale žádná z ostatních funkčních ploch této úspěšnosti nedosáhne. Z klasifikačního stromu je vidět, že proměnná *plocha* se na klasifikaci nepodílí a nepřispívá k rozlišení mezi jednotlivými skupinami. Naopak *míra komplexnosti* (označená jako `fd`)



Obrázek 16: Grafická reprezentace klasifikačního stromu

Funkční plocha	DP	OB	OST	TECH	VÝR	VV	VP	ZEL	ZEM
Úspěšnost zařazení (%)	7,5	16	0	0	0	0	10	39,7	86,4

Tabulka 10: Úspěšnost zařazení funkčních ploch

se uplatňuje zejména ve vyšších patrech klasifikačního stromu. Spodní větve jsou klasifikovány zejména na základě veličin *index tvaru* (*si*) a *obvod plochy* (*perimeter*). To jen potvrzuje závěr předchozí úlohy, kdy bylo konstatováno, že fraktální dimenze dokáže rozlišit mezi výraznými tvary, ale lokální rozdíly nedokáže spolehlivě popsat.

7.4 Diskuze

Výsledky analýzy ukazují, že na základě geometrických charakteristik není možné rozlišit mezi jednotlivými typy městských funkčních ploch. Vysoká úspěšnost zařazení ke správné kategorii byla jen u zemědělských ploch, do této kategorie ale byly zařazené téměř všechny špatně klasifikované plochy z ostatních kategorií, a proto ani zde nejsou výsledky uspokojivé.

Vliv na výsledky mohou mít jak zvolené geometrické charakteristiky, tak i metody výpočtu.

Největší otazník je u použití míry komplexnosti namísto fraktální dimenze. Vzhledem k velkému počtu ploch ale nebylo možné počítat přesný odhad fraktální dimenze pro všech více než 2000 vyšetřovaných ploch a míra komplexnosti je rovněž ukazatelem složitosti tvaru, proto by tato veličina měla být vhodným ukazatelem pro tento druh analýz.

Rovněž se nabízí použití jiných metod klasifikace. Neuronové sítě, support vector machine a jiné statistické metody se běžně používají pro klasifikaci prvků do tříd [15]. Klasifikační stromy jsou však spolehlivou, lehce interpretovatelnou metodou, která se jeví jako vhodná vzhledem k nenormalitě rozdělení dat.

7.5 Závěr

Navzdory pozitivním závěrům předchozí studie se ukázalo, že městské základní funkční plochy nelze klasifikovat na základě jejich geometrických charakteristik k příslušnému typu funkční plochy. Pouze geometrické charakteristiky nepopisují dostatečně rozdíly těchto ploch a nelze je tedy použít jako podklad k územnímu plánování.

8 Diskuze

8.1 Kvalita dostupných software pro výpočet fraktální dimenze

V kapitole 3.3 byly představeny nástroje pro výpočet fraktální dimenze integrované v GIS. Mimo GIS však existuje řada nástrojů pro výpočet fraktální dimenze, namátkou jsou to Fractalyse¹ nebo HARFA², vyvinutý na Fakultě chemické na VUT Brno a dostupný jako sciware. Fractalyse má v sobě zabudovanou celou řadu rozdílných metod pro výpočet fraktální dimenze, rovněž HARFA umožňuje vysoce sofistikovanou analýzu obrazových záznamů a narozdíl od Fractalyse není omezen jen na binární obrazové záznamy.

Bohužel různé metody při různém nastavení v obou software poskytují značně odlišné výsledky. Na stejnou problematiku se zaměřil [34] a ukázal, že mnoho dostupných programů pro výpočet fraktální dimenze podává jiné výsledky i při zkoumání jednoho tvaru jednou metodou (rozdíly může způsobit například otočení obrazového záznamu). Stejně tak žádný z testovaných programů se neuměl vypořádat s geometricky hladkými tvary a například pro čtverec či kruh počítal neceločíselnou dimenzi.

Přitom každý útvar má přesně jednu dimenzi, a všechny metody pro výpočet fraktální dimenze, při všech nastaveních, by měly podávat stejné výsledky.

Toto je velkým úskalím fraktální analýzy. Nespolehlivost dostupných řešení může vést k zavádějícím výsledkům i při správném provedení analýzy. Jako nejspolehlivější se jeví řídit se při výběru metody podle principu Occamovy břitvy a vybrat si takové řešení, které se jeví jako logicky nejúspornější a kde šance udělat chybu je nejmenší.

8.2 Perspektivy fraktální analýzy v geoinformaticce

V současnosti existuje celá řada publikací, zabývající se možnostmi využití poznatků fraktální geometrie v geovědách. Většinou se však omezují na pouhý

¹<http://www.fractalyse.org/>

²<http://www.fch.vutbr.cz/lectures/imagesci/>

popis objektů jejich fraktální dimenzí, nepatrné množství se zabývá simulacemi. Klasickou úlohou je měření fraktální dimenze a sledování její velikosti v závislosti na různých parametrech (ať už je to čas [1], socioekonomické údaje [7] nebo jiné charakteristiky.) Situace, kdy by celá aplikace byla založena čistě na fraktální dimenzi je ojedinělá, většinou bývají fraktální charakteristiky kombinovány s dalšími veličinami. Výjimkou je například studie [28], kteří využili fraktální dimenzi obrazových záznamů RADARSAT-1 SAR k automatické detekci ropných skvrn na moři.

Jak už bylo zmíněno dříve v textu, existuje víc algoritmů pro odhad fraktální dimenze a tyto algoritmy podávají rozdílné výsledky. Například TPSA algoritmus má mnoho obměn, jejichž výsledky se liší [21] a je tedy otázkou, kterou metodu použít.

Publikace zabývající se fraktální dimenzí v geovědách lze tedy rozdělit na dva základní proudy - publikace, zabývající se vývojem a testováním algoritmů, a publikace zabývající se fraktálními charakteristikami objektů.

V oblasti geografie sídel se studie omezují většinou na popis růstu města z hlediska jeho fraktální dimenze ([1]), případně spojují fraktální dimenzi s dalšími ukazateli ([7]).

Vzhledem k tomu, že reálné objekty nelze popsat matematickým předpokladem (tak jak to jde u matematických fraktálů), jsou možnosti předpovědi a simulace fraktálního chování reálných objektů velmi omezené. Hlavní oblast použití tedy zůstává u prostého popisu objektů a tvarů z pohledu jejich fraktální dimenze. Kromě tvaru zástavby, která je zkoumána nejčastěji, se nabízí hlavně aplikace při studiu sítí (komunikačních, inženýrských i vodních). Můžeme u nich totiž často sledovat opakované struktury větvení. Nabízí se například možnost sledovat závislost výskytu nehod na lokální fraktální dimenzi komunikací. Podobných příkladů je možné najít více a záleží ždy na individuálním uvážení, zda složitost tvarů (o které fraktální dimenze vypovídá) je v dané studii smysluplnou proměnnou.

Uvažujeme-li o využití fraktální geometrie ke studiu objektů reálného světa, vyvstává ještě jeden problém, který jmenuje [29]: nakolik jsou reálné objekty skutečnými fraktály? Mnoho autorů ukazuje, že objekty reálného světa mají fraktální charakteristiky, ať už se jedná o soběpodobnost nebo soběpříbuznost (například [1], [27], [30]). Žádný z reálných objektů však nevykazuje tyto charakteristiky ve všech měřítkách, tak jako matematické fraktály. Například sledujeme-li opakující se struktury v půdorysné stavbě města, nikdy nelze jít hlouběji než do dvou, maximálně tří přiblížení. Stejně platí i pro opakující se struktury větvení sítí, až už říčních, nebo komunikačních, inženýrských.

Je tedy otázkou, nakolik je fraktální dimenze vypovídající charakteristikou u objektů, které nejsou striktně fraktální, případně v jakém měřítku má cenu tyto objekty zkoumat. Při generalizaci tvarů se totiž typické vzory ztrácejí a tím se snižuje i fraktalita těchto tvarů.

9 Závěr

Tato práce se snažila přiblížit možnosti použití fraktální analýzy v geovědách, zejména v geografii sídel. Práce podává stručný teoretický základ a definice fraktální dimenze, představuje několik metod jejího odhadu a zabývá se třemi případovými studii.

V první studii je zkoumán růst města z pohledu jeho fraktálních charakteristik. Ukazuje se, že plocha, kterou město okupuje, je silně korelována s jeho fraktální dimenzí.

Druhá studie se zabývá možnostmi automatické klasifikace objektů na základě jejich fraktálních charakteristik. Listy rostlin patřící do tří čeledí jsou úspěšně klasifikovány jen na základě jejich fraktálních charakteristik, což potvrzuje, že fraktální dimenze je cennou informací pro klasifikační úlohy.

Třetí studie se snaží aplikovat poznatky vyplývající z druhé studie na příklad klasifikace městských funkčních ploch na základě jejich geometrických charakteristik. Výsledky ukazují, že tyto plochy nelze od sebe odlišit jen na základě jejich geometrických charakteristik a že pro úspěšnou klasifikaci je třeba najít další, negeometrické parametry objektů.

10 Seznam použité literatury

Reference

- [1] Batty, M., Longley. P., *Fractal Cities: A Geometry of Form and Function*. Academic Press, London., 1995.
- [2] Borowski W., *Fractal dimension based features are useful descriptors of leaf complexity and shape*. Canadian Journal of Forest Research 29: 1301–1310., 1999.
- [3] Breiman, L., Friedman, J. H., Olshen, R. A., Stone, J. C., *Classification and regression trees*. Wadsworth, Monterey (CA)., 1983.
- [4] Bromley, O. *Star Fort [online]*. 2009-12-1 [cit. 2011-02-18]. Dostupné z WWW: <http://http://www.ucl.ac.uk/~tcrnmar/index_no_frames.html>. 2009.
- [5] Conover, W. J., *Practical nonparametric statistics*. John Wiley and Sons, Inc., 1980.
- [6] Clarke K. C., *Computation of the fractal dimension of topographic surfaces using the triangular prism surface area method*. Computers and Geosciences 12(5): 713-722., 1980.
- [7] De Keersmaecker M.-L., Frankhauser P., Thomas I., *Using fractal dimensions for characterizing intra-urban diversity. The example of Brussels..* článek prezentován na kongresu ERSa 2003, září 2003, Jyväskylä, Finsko 2003.
- [8] Dubuc. B., Quiniuo. J.F., Roques-Carmes. S., Tricot. C., Zucker. S. W., *Evaluating the fractal dimensions of profiles*. Phys. Rev. 39: 1500-1512., 1989.
- [9] Falconer K. J., *The Geometry of Fractal Sets*. Cambridge: Cambridge University Press., 1985.

- [10] Fisher R. A., *The Use of Multiple Measurements in Taxonomic Problems*. Annals of Eugenics. 7: 179-188., 1936.
- [11] Forman R. T. T., Gordon M., *Landscape Ecology*. John Wiley and Sons, Inc., 1996.
- [12] Ge. M., Lin Q., *Realizing the Box-counting Method for Calculating Fractal Dimension of Urban Form Based on Remote Sensing Image*. Geo-spatial Information Science. 12(4): 265-270., 2009.
- [13] Gil J., Gimeno M., Laborda J., Nuviala J., Seccionados I., *Tangential Algorithm for Calculation of the Fractal Dimension of Kidney Tubuli Section*. Int. J. Morphol. 24(1): 31-34., 2006.
- [14] Goodchild M. F., *Fractals and the accuracy of geographical measures*. Mathematical Geology 12: 85-98., 1980.
- [15] Hand D., Mannila H., Smyth P., *Principles of Data Mining*. The MIT Press, Inc., 2001.
- [16] Hausdorff F., *Dimension und äußeres Maß*. Mathematische Annalen 79(1-2): 157-179., 1919.
- [17] Hebák, P., Hustopecký, J., Jarošová, E., Pecáková, I., *Vícerozměrné statistické metody [1]*. Informatorium, Praha., 2004.
- [18] Hendl. J., *Přehled statistických metod zpracování dat*. Portál., 2004.
- [19] Chen. Y., *A fractal study of the spatial structure of the urban system in Central Plains*. Changchun: Northeast China Normal University., 1995.
- [20] Jiang. S., *Study on fractal urban form using GIS and remote sensing images of Beijing: theory, method and practice*. Beijing: Peking University., 2004.
- [21] Ju, W., Lam. N. S.-N., *An improved algorithm for computing local fractal dimension using the triangular prism method*. Computers and Geosciences 35: 1224-1233., 2009.

- [22] Kraft. R., Kauer. J., [online] *Estimating the Fractal Dimension from Digitized Images*. Dostupné z WWW: <<http://www.wzw.tum.de/ane/algorithms/algorithms.html>>. 1995.
- [23] Kruskal, W., Wallis. W. A., *Use of ranks in one-criterion variance analysis*. Journal of the American Statistical Association 47 (260): 583–621., 1952.
- [24] Lake, M. *GIS [online]*. 1999-07-27 [cit. 2011-02-18]. Mark Lake. Dostupné z WWW: <http://http://www.ucl.ac.uk/~tcrnmar/index_no_frames.html>. 1999.
- [25] Mancuso S., *The Fractal Dimension of Grapevine Leaves as a Tool for Ampelographic Research*. HarFA - Harmonic and Fractal Image Analysis 6-8., 2001.
- [26] Mandelbrot, B., *How Long Is the Coast of Britain? Statistical Self-Similarity and Fractional Dimension*. Science, New Series, 156(3775): 636-638., 1967.
- [27] Mandelbrot, B., *The Fractal Geometry of Nature*. W. H. Freeman. San Francisco., 1983.
- [28] Marghany M., Hashim M., Cracknell A.P., *Fractal Dimension Algorithm for Detecting Oil Spills Using RADARSAT-1 SAR*. Lecture Notes in Computer Science. 4705/2007: 1054-1062., 2007.
- [29] Myint S.W., *Fractal approaches in texture analysis and classification of remotely sensed data: comparisons with spatial autocorrelation techniques and simple descriptive statistics*. Int. J Remote Sensing. 24/9: 1925-1947., 2007.
- [30] Peitgen, H. O., Jurgens, H., Saupe, D., *Fractals for the Classroom: Part 1: Introduction to Fractals and Chaos*. Springer-Verlag, New York., 1992.
- [31] Poreh D., *Active tectonics, river profile, and fractal analysis in Zagros, Iran*. Himalayan Geology, 31 (2): 83-95., 2010.

- [32] Poulsen, J., French, A., *Discriminant Function Analysis [online]*. 2006-04-08 [cit. 2011-03-08]. Dostupné z WWW: <<http://userwww.sfsu.edu/~efc/classes/biol710/discrim/discriminant.htm>>. 2006.
- [33] Quattrochi, D. A., Lam, N. S.-N., Qiu, H. L., Zhao, W., *Image characterization and modeling systems (ICAMS): a geographic information system for the characterization and modeling of multiscale remote-sensing data*. In *Scale in Remote Sensing and GIS*, D. Quattrochi and M. Goodchild, eds. Boca Raton, FL: CRC/Lewis Publishers., 1997.
- [34] Reynoso, C., "The impact of chaos and complexity theories on spatial analysis -Problems and perspectives. článek prezentován na 24th Research Symposium: Reading Historical Spatial Information from around the World: Studies of Culture and Civilization Based on Geographic Information Systems Data, Kyoto Japan, 7-11 February., 2005.
- [35] Richardson, L. F., "The problem of contiguity: An appendix to *Statistic of Deadly Quarrels*". *General systems: Yearbook of the Society for the Advancement of General Systems Theory*. Ann Arbor, Mich.: The Society, [1956:- Society for General Systems Research) 6 (139): 139–187., 1961.
- [36] Shapiro, S. S., Wilk M. B., *An analysis of variance test for normality (complete samples)*. *Bimetrika* 52 (3-4): 591–611., 1965.
- [37] Shumaker, N. H., *Using Landscape Indices to Predict Habitat Connectivity*. *Ecology* 77: 1210–1225., 1996.
- [38] Steinberg, D., *CART: Classification and Regression Trees [online]*. [cit. 2011-03-08]. Dostupné z WWW: <http://74.125.155.132/scholar?q=cache:hJ9snVYVmdMJ:scholar.google.com/+CART%E2%80%9494classification+and+regression+trees+Steinberg&hl=cs&as_sdt=0&as_vis=1>. 2009.
- [39] Sun, W., *Three New Implementations of the Triangular Prism Method for Computing the Fractal Dimension of Remote Sensing Images*. *Photogrammetric Engineering and Remote Sensing* 373-382., 2006.

- [40] Szustalewicz A., Vassilopoulos A. *Calculating the Fractal Dimension of River Basins, Comparison of Several Methods*. Biometrics, Computer Security Systems and Artificial Intelligence Applications, 299-309., 2006.
- [41] Tabachnick, B. B., Fidell, L. S., *Using multivariate statistics*. HarperCollins College Publishers. New York, NY., 1996.
- bibitemhotho6 Hothorn, T., Hornik, K., Zeileis, A., *Unbiased Recursive Partitioning: A Conditional Inference Framework*. Journal of Computational and Graphical Statistics, 15(3): 651–674., 2006.
- [42] Tichák. M., *Když padly hradby*. Olomouc, Burian a Tichák, s.r.o., 2005.
- [43] Tišnovský. P., *[online] Interaktivní editor afinních transformací*. 1999-05-30 [cit. 2010-09-04]. Fraktály. Dostupné z WWW: <<http://www.fit.vutbr.cz/~tisnovpa/publikace/diplomka/doc/ifscad.html>>. 1999.
- [44] White. R., Engelen. G., *Cellular automata and fractal urban form: a cellular modeling approach to the evolution of urban land-use patterns*. Environment and Planning A, 25(8): 1175-1199., 1993.
- [45] Woronow A., *Morphometric consistency with the Hausdorff-Besicovitch dimension*. Mathematical Geology 13: 201-216., 1981.
- [46] Zmeškal, O., Nežádal, M., Buchníček, M., Bžatek, T. *Harmonic and Fractal Image Analyzer*. Dostupné z WWW: <http://http://www.ucl.ac.uk/~tcrnmar/index_no_frames.html>. Brno,2005.